На первой странице работы нужно написать «Домашний экзамен по алгебре, 1 курс», после чего указать фамилию и имя сдающего экзамен; *больше ничего на первой странице не должно быть написано.*

Решение каждой задачи или пункта, где требуется ответ, должно начинаться словом «Ответ», за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.

Решения задач нужно сдать в учебную часть или непосредственно В. Доценко (dotsenko@mccme.ru) не позже 18^{00} четверга 20 мая. Около каждой задачи указано число баллов за её полное решение. Ориентировочные критерии оценок: 40 баллов — «5», 32 балла — «4», 24 балла — «3»; пересдача осенью. Удачи!

1. (3 балла) Опишите все конечные группы с не более чем тремя классами сопряжённости.

2. Говорят, что группа G действует на множестве M k-транзитивно, если любой набор из k различных элементов M может быть переведён действием группы в любой другой такой набор.

(а) (1 балл) Докажите, что группа S_n действует (на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$) n-транзитивно, а группа A_n — $(n-2)$-транзитивно.

(б) (3 балла) Опишите все $(n-2)$-транзитивные подгруппы группы S_n (действующей на n-элементном множестве стандартным образом).

3. Рассмотрим группу H_n матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(а) (1 балл) Укажите элементы $x, y, \xi \in H_n$, порождающие эту группу, для которых выполнены соотношения $x^n = y^n = \xi^n = e$, $x\xi = \xi x$, $y\xi = \xi y$, $xy = \xi yx$.

(б) (3 балла) Докажите, что любая группа, порождённая элементами x, y, ξ с такими соотношениями, является факторгруппой группы H_n.

(в) (2 балла) Опишите одномерные представления группы H_n.

(г) (3 балла) Укажите n-мерное неприводимое комплексное представление группы H_n.

4. (1 балл) Докажите, что неприводимое комплексное представление любой трёхмерной алгебры одномерно.

5. (4 балла) Пусть V — двумерное неприводимое комплексное представление группы S_3. Докажите, что для любых $k, l \in \mathbb{N}$ представления группы S_3 в пространствах $S^k(S^l(V))$ и $S^l(S^k(V))$ изоморфны.

6. (2 балла) Любое ли конечномерное представление группы S_3 над полем $\mathbb{F}_3$ можно разложить в прямую сумму неприводимых?

7. (3 балла) Могут ли комплексные неприводимые представления конечной группы G исчерпываться пятью одномерными и одним пятимерным?

8. (3 балла) Пусть конечная группа G действует на (конечном) множестве M, V — представление в пространстве комплексных функций на M. Обозначим через M^g множество неподвижных точек элемента $g \in G$ в M. Докажите, что

$$\sum\nolimits_{g\in G} \#M^g = \sum\nolimits_{g\in G} \chi_V(g).$$

9. (5 баллов) Пусть $\#G = p^n$ (p — простое число), $\operatorname{char} \Bbbk = p$. Докажите, что подпространство

$$J = \left\{ \sum\nolimits_{g\in G} c_g g \mid \sum\nolimits_{g\in G} c_g = 0 \right\} \subset \Bbbk G$$

является идеалом, причём этот идеал нильпотентен, т. е. для некоторого N для любых $a_1, \dots, a_N \in J$ выполнено $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_N = 0$.

10. **(а)** (1 балл) Докажите, что найдётся элемент $a \in \mathbb{F}_p$, для которого уравнение $x^2 = a$ неразрешимо в $\mathbb{F}_p$. Докажите, что факторкольцо $\mathbb{F}_{p^2} := \mathbb{F}_p[t]/(t^2 - a)\mathbb{F}_p[t]$ — поле, в котором всякое квадратное уравнение с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$ разрешимо.

(б) (3 балла) Группа $G = GL_2(\mathbb{F}_p)$ действует на множестве $L = \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$ дробно-линейными преобразованиями $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Отсюда возникает представление в $V = C(L)$ — пространстве комплексных функций на L. Вычислите $\dim \operatorname{Hom}_G(V, V)$.

11. (4 балла) Найдите кратность тривиального (одномерного) представления группы G в представлении, индуцированном с регулярного представления её подгруппы H (можно считать, что основное поле — $\mathbb{C}$).

12. Опишите все конечномерные тела над **(а)** (1 балл) $\mathbb{C}$; **(б)** (5 баллов) $\mathbb{R}$.