На первой странице работы нужно написать «Домашний экзамен по алгебре за 2 семестр, осень 2004», после чего указать фамилию и имя сдающего экзамен; *больше ничего на первой странице не должно быть написано.*

Решение каждой задачи или пункта, где требуется ответ, должно начинаться словом «Ответ», за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.

Решения задач нужно сдать в учебную часть или непосредственно В. Доценко (`dotsenko@mccme.ru`) не позже 18^{00} вторника 21 сентября. Около каждой задачи указано число баллов за её полное решение. Ориентировочные критерии оценок: 37 баллов — «5», 28 баллов — «4», 19 баллов — «3».

1. (**а**) (3 балла) Докажите, что если для элементов g, h конечной группы G верны равенства $g^2 = h^2 = e$, то эти элементы порождают в G подгруппу, изоморфную группе симметрий n-угольника (для некоторого n).

(**б**) (3 балла) Верно ли это без условия конечности группы G?

2. Докажите, что у конечной простой группы не может быть ровно

(**а**) (1 балл) одно неодномерное комплексное неприводимое представление;

(**б**) (2 балла) два неодномерных комплексных неприводимых представления.

(**в**) (3 балла) Приведите примеры, доказывающие, что в каждом из случаев простота группы существенна.

3. (**а**) (2 балла) Докажите, что для неприводимого комплексного представления конечной группы G в пространстве V следующие условия эквивалентны:

- представление изоморфно представлению в двойственном пространстве V^*;
- характер χ_V принимает только вещественные значения;
- на пространстве V существует ненулевая G-инвариантная билинейная форма f.

(**б**) (3 балла) Пусть если эти условия выполнены. Докажите, что форма f — либо симметрическая, либо кососимметрическая, и если ограничить основное поле до $\mathbb{R}$, то представление (соответственно) либо распадётся в сумму двух изоморфных неприводимых, либо останется неприводимым.

4. (**а**) (2 балла) Опишите все группы порядка 57.

(**б**) (4 балла) Пусть G — неабелева группа порядка 57. Опишите неприводимые представления G.

5. Группа $G = GL_4(\mathbb{F}_p)$ действует на множестве L прямых (одномерных подпространств) в пространстве $\mathbb{F}_p^4$ и на множестве S двумерных подпространств этого пространства. Отсюда возникают представления G в $V = C(L)$ и $W = C(S)$.

(**а**) (1 балл) Вычислите $\dim \operatorname{Hom}_G(V, V)$.

(**б**) (2 балла) Вычислите $\dim \operatorname{Hom}_G(V, W)$.

(**в**) (3 балла) Вычислите $\dim \operatorname{Hom}_G(W, W)$.

(Как обычно, через $C(M)$ обозначается пространство комплексных функций на множестве M.)

6. (4 балла) Группа $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$ действует на L — множестве k-мерных подпространств в $\mathbb{F}_p^n$. Отсюда возникает представление G в $V = C(L)$. Докажите, что алгебра $\operatorname{Hom}_G(V, V)$ коммутативна.

7. (**а**) (4 балла) Подгруппа $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ такова, что порядок любого её элемента не превосходит 100. Докажите, что эта подгруппа конечна, если представление G в $\mathbb{C}^n$ неприводимо;

(**б**) (4 балла) …и даже без такого предположения.

8. (4 балла) Рассмотрим в S_4 подгруппу, порождённую циклом $\tau = (1234)$, и комплексное представление U этой подгруппы, в котором τ действует умножением на $i = \sqrt{-1}$. Разложите на неприводимые представление группы S_4, индуцированное с представления U.

9. (**а**) (1 балл) Докажите, что элемент $z = \sum\limits_{g,h \in G} ghg^{-1}h^{-1}$ групповой алгебры конечной группы G лежит в центре этой алгебры.

(**б**) (5 баллов) Пусть V — неприводимое комплексное представление группы G. По лемме Шура z действует на V умножением на число $\lambda \in \mathbb{C}$. Чему равно это число?