**1.** Докажите, что если для оператора $A$ выполнено условие $A^2 = A$, то этот оператор является проектором.

**2.** Пусть два оператора $A$ и $B$ на комплексном векторном пространстве коммутируют ($AB = BA$). Докажите, что у них есть общий собственный вектор.

Обозначим через $\mathbb{F}_p$ поле вычетов по модулю $p$.

**3.** Проверьте, что $S_3 \simeq GL_2(\mathbb{F}_2)$. (Какие три объекта переставляет группа $GL_2(\mathbb{F}_2)$?)

**4.** Найдите число элементов в группе (**а**) $GL_n(\mathbb{F}_p)$; (**б**) $SL_n(\mathbb{F}_p)$.

**5.** (**а**) Вычислите $A_{n,k}(p)$ — число $k$-мерных подпространств в $n$-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_p$.

(**б**) Докажите равенство

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n,k}(p) p^{k(k-1)/2} t^k = (1+t)(1+pt)\dots(1+p^{n-1}t).$$