Напомним, что для конечномерных векторных пространств V_1 и V_2 *тензорное произведение* $V_1^\vee \otimes V_2^\vee$ двойственных к ним пространств есть пространство билинейных форм $f\colon V_1 \times V_2 \to K$ (здесь K — основное поле).

1. Докажите, что пространство $(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3$ естественно отождествляется с пространством $(V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3)$.

2. Докажите, что пространство $(V_1 \otimes V_2)^\vee$ естественно отождествляется с пространством $V_1^\vee \otimes V_2^\vee$.

3. (**а**) Докажите, что векторное пространство $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 естественно отождествляется с $V_1^\vee \otimes V_2$. (**б**) В частности, пространство линейных операторов на пространстве V отождествляется с $V^\vee \otimes V$. Как при этом отождествлении записывается след?

4. Выразите (**а**) $\dim S^k V$; (**б**) $\dim \Lambda^k V$ через $\dim V$.

5. Дайте определение билинейного отображения из $V_1 \times V_2$ в произвольное векторное пространство W и докажите, что векторное пространство таких отображений совпадает с пространством $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W)$ линейных отображений из $V_1 \otimes V_2$ в W. Этот факт лежит в основе другого определения тензорного произведения.