1. Докажите, что факторгруппа некоммутативной группы по её центру не может быть циклической.

2. Пусть в группе G указаны две нормальные подгруппы N_1 и N_2, причём $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, $\#N_1 \cdot \#N_2 = \#G$. (**а**) Докажите, что любой элемент $n_1 \in N_1$ коммутирует с любым элементом $n_2 \in N_2$: $n_1 n_2 = n_2 n_1$. (**б**) Докажите, что $G \simeq N_1 \times N_2$. (**в**) Используйте это утверждение для классификации групп порядка 45.

3. Докажите, что группа порядка pq не является простой, если p и q — простые числа.

4. *Коммутант* группы G — это подгруппа, порождённая *коммутаторами*, т. е. элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$, где $a, b \in G$. Вычислите коммутант группы (**а**) S_4; (**б**)* S_n; (**в**)* A_n; (**г**) $SL_2(\mathbb{F}_p)$; (**д**)* $SL_n(\mathbb{F}_p)$.

5. Опишите все неприводимые комплексные представления группы (**а**) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; (**б**) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

6. Докажите, что *коммутант* группы G содержится в ядре любого одномерного представления (т. е. переходит в единицу).

7. (Продолжение) Опишите одномерные комплексные представления группы (**а**) S_3; (**б**) A_4; (**в**) S_4; (**г**) D_n (симметрий n-угольника); (**д**) S_n.

8. Постройте неприводимое двумерное комплексное представление группы (**а**) S_3; (**б**) S_4 (указание: используйте гомоморфизм из S_4 в S_3).

9. Группа симметрий квадрата переставляет вершины, поэтому возникает её представление в пространстве функций на вершинах. Разложите это представление в сумму неприводимых. Рассмотрите случай (**а**) комплексных; (**б**) вещественных функций.

10. (**а**) Пусть группа S_3 действует в $\mathbb{C}^3$ перестановками координат (тавтологическое представление). Докажите, что это представление есть прямая сумма (тривиального) одномерного и двумерного неприводимых представлений.

(**б**) Решите ту же задачу для другого трёхмерного представления группы S_3: перестановка σ сначала переставляет координаты, а потом умножает их все на знак $(-1)^{\text{чётность } \sigma}$.

(**в**) В двух предыдущих пунктах обнаружены два одномерных и два двумерных представления группы S_3. Изоморфны ли полученные одномерные представления? А двумерные?

(**г**)* Решите те же задачи для группы S_4 и двух её четырёхмерных представлений.