1. Группа $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$ действует на L — множестве прямых (одномерных подпространств) в пространстве $\mathbb{F}_p^n$. Отсюда возникает представление группы G в пространстве комплексных функций на L. Является ли оно неприводимым, и если нет, то в сумму какого числа неприводимых оно раскладывается?

2. В этой задаче G — произвольная абелева группа (если это почему-то удобно, можно для начала считать, что $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

(**а**) Докажите, что комплексная групповая алгебра $\mathbb{C}G$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}^{\#G}$ (с покомпонентными сложением и умножением).

(**б**) Докажите, что вещественная групповая алгебра $\mathbb{R}G$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{C}^q$ при некоторых p и q; разумеется, из соображений размерности $p + 2q = \#G$.

(**в**) Докажите, что если характеристика поля $\Bbbk$ не делит порядок группы G, то групповая алгебра $\Bbbk G$ изоморфна прямой сумме полей.

(**г**) Верно ли это, если характеристика поля делит порядок группы?

(**д**) Верны ли эти утверждения для неабелевой группы?

3. (**а**) Докажите, что алгебра матриц над произвольным полем проста, т. е. не содержит нетривиальных (двусторонних) идеалов. (**б**) Приведите пример простой алгебры над полем вещественных чисел, которая не изоморфна матричной алгебре. (Над полем комплексных чисел каждая (конечномерная) простая алгебра изоморфна матричной. Это будет доказано на одной из следующих лекций.)

4. Укажите в алгебре (**а**) 2×2- ; (**б**) $n \times n$-матриц два элемента, которые её порождают.

5. (Теорема Амицура–Левицкого) Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — матрицы размера $n \times n$, где (**а**) $n = 2$; (**б**)* n — любое натуральное число. Докажите, что

$$\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\text{чётность}\,\sigma} A_{\sigma(1)} \cdot A_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(k)} = 0$$

при $k = 2n$ верно для любого набора матриц, а при $k < 2n$ — не для любого.