1. Вычислите характер *регулярного* представления конечной группы G (т. е. представления в $\Bbbk G$ «левыми сдвигами»).

2. Докажите, что размерность центра групповой алгебры $\Bbbk G$ равна количеству классов сопряжённости группы G.

3. Вычислите характер тавтологического комплексного представления группы (**а**) S_3; (**б**) S_n и выведите из этого вычисления, что тавтологическое представление есть сумма двух неприводимых.

4. (**а**) Проверьте прямым вычислением, что характеры любых двух различных неприводимых представлений группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ортогональны. (**б**) Тот же вопрос для группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5. (**а**) Пусть (конечная) группа G действует на конечном множестве L. Отсюда возникает представление в пространстве $V = C(L)$ комплексных функций на L. Докажите, что размерность пространства $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ сплетающих операторов $f\colon V \to V$ равна количеству орбит группы G в $V \times V$ и — если группа действует на множестве L транзитивно — равна количеству орбит группы H в L (где $H = \mathrm{Stab}_l$ — стабилизатор какой-то точки $l \in L$; в случае транзитивного действия стабилизаторы всех точек изоморфны).

(**б**) (Продолжение) Пусть группа G действует также на множестве M, положим $W = C(M)$. Докажите, что размерность пространства $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ равна количеству орбит группы G в $V \times W$ и равна количеству орбит группы H в M (действие на L всё ещё надо предполагать транзитивным).

6. Пусть V — двумерное комплексное представление конечной группы G, g — элемент коммутанта этой группы. Докажите, что если $\chi_V(g) \neq 2$, то представление V неприводимо.

7. Вычислите характер двумерного неприводимого представления группы S_4, построенного в задаче 8 семинара 5. Проверьте соотношение ортогональности для этого характера и характера тавтологического представления. (Соотношение ортогональности должно быть выполнено, ибо из задачи 3 следует, что тавтологическое представление есть сумма одномерного и трёхмерного неприводимых представлений.)