1. Опишите все (с точностью до изоморфизма) неприводимые комплексные представления группы (**а**) S_3; (**б**) A_4; (**в**) S_4; (**г**)* A_5.

2. Пусть даны операторы A и B на векторных пространствах V и W соответственно. Оператор $A \otimes B$ на пространстве $V \otimes W$ определяется формулой $(A \otimes B)(v \otimes w) = (Av) \otimes (Bw)$. Этот оператор называется тензорным, или кронекеровским произведением операторов A и B.

(**а**) Пусть даны матрицы операторов A и B в некоторых базисах e_i, f_j. Выпишите матрицу $A \otimes B$ в базисе $e_i \otimes f_j$.

(**б**) Как выразить $\operatorname{tr} A \otimes B$ через $\operatorname{tr} A$ и $\operatorname{tr} B$?

(**в**) Вычислите $\det A \otimes B$. (В ответ входят $\det A$, $\det B$, $\dim V$ и $\dim W$.)

3. Если V и W — два представления группы G, то можно построить представление $V \otimes W$ (в нём элементы группы действуют тензорными произведениями соответствующих операторов).

Разложите в сумму неприводимых представление $V \otimes V$, где V — тавтологическое представление группы (**а**) S_3; (**б**) S_4.

4. (**а**) Пусть V — n-мерное комплексное пространство. На $V \otimes V \otimes V$ действует группа S_3, переставляя сомножители. Разложите это представление в сумму неприводимых.

(**б**) Тот же вопрос для группы S_4 (и четырёх сомножителей).

5. (**а**) На сторонах правильного треугольника написаны числа $1, 2, 3$. Каждую минуту число на каждой стороне заменяют на полусумму чисел на соседних сторонах. Какова будет «предельная ситуация» (через достаточно большое время)?

(**б**) Тот же вопрос для n-угольника (если, скажем, числа $1, \dots, n$ записаны по часовой стрелке).

6. (**а**) Укажите $(p-1)$-мерное неприводимое комплексное представление группы $G \subset GL_2(\mathbb{F}_p)$, состоящей из матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$.

(**б**) Опишите все неприводимые комлексные представления этой группы.