1. Укажите явно разложение групповой алгебры $\mathbb{C}G$ в сумму матричных, если $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

2. ...если $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

3. ...если $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

4. ...если $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

5. ...если $G \simeq S_3$.

6. Напомним, что есть две неизоморфных неабелевых групп порядка 8: группа симметрий квадрата S и группа кватернионов H. Докажите, что их групповые алгебры над $\mathbb{C}$ изоморфны, а над $\mathbb{R}$ — неизоморфны:

$$\mathbb{C}S \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}H,$$

$$\mathbb{R}S \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \not\simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}H.$$