6. Теория меры и интеграла

6.1. Основные определения

Основными понятиями теории меры и интеграла являются понятия измеримого пространства, пространства с мерой, измеримой функции и интеграла Лебега. Сначала мы построим теорию, а потом покажем, как строятся пространства с мерой Лебега и Лебега – Стилтьеся на $\mathbb{R}^n$, а также мера Винера и другие меры в бесконечномерном пространстве.

Определение 6.1. Непустая система $\mathcal{A}$ подмножеств множества X называется алгеброй, если она обладает тем свойством, что если два множества принадлежат $\mathcal{A}$ то их сумма, пересечение, разности и симметрическая разность принадлежит $\mathcal{A}$ и при этом $X \cap A = A\ \forall A \in \mathcal{A}$. Пара (X, Σ) называется *σ-алгеброй* (или *измеримым пространством*), если она является алгеброй и при этом объединение любого счётного числа элементов ($\Leftrightarrow A_i \in \Sigma,\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Sigma$).

Упражнение 6.1. Докажите, что в измеримом пространстве пересечение счётного числа измеримых множеств измеримо.

Определение 6.2. Функция $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_+$, определённая на σ-алгебре Σ называется *мерой*, если она σ-аддитивна, т. е. если из $A_i \in \Sigma,\ \ A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, следует, что $\mu(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$. Измеримое пространство, на котором определена (σ-аддитивная) мера называется *пространством с мерой*.

Напомним, что множество $\mathcal{L}_\alpha(f) = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ -называют *лебеговским* множеством.

Определение 6.3. Пусть (X, Σ, μ) – пространство с конечной мерой (т. е. $\mu(X) < \infty$). Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *измеримой*, если все ее лебеговские множества измеримы.

Вместо лебеговских множеств можно было брать их дополнения $\mathcal{M}_\alpha(f) = \mathbb{R} \setminus \mathcal{L}_\alpha(f) = \{x \mid f(x) > \alpha\}$.

Упражнение 6.2. Докажите, что функция на измеримом пространстве измерима, тогда и только тогда, когда прообраз открытого множества на прямой измерим.

Совокупность измеримых функций на X обозначим $L_0(X)$.

Пример 6.1. Непрерывные функции на конечном отрезке – измеримы.

Пример 6.2. Функции Дирихле и Римана измеримы.

Упражнение 6.3. Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – измерима, а функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что тогда функция $g(f)$ – измерима.

Пусть снова (X, Σ, μ) – пространство с конечной мерой и $f : X \to \mathbb{R}$ – измеримая функция на X. Рассмотрим всевозможные возрастающие последовательности вещественных чисел $... \leq y_{-n} \leq ... \leq y_0 ...$ $(\lim_{\pm\infty} = \pm\infty)$. Выражение

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n \mu\{x \mid y_n \leq f(x) < y_{n+1}\}, \; y_n \leq \eta_n < y_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

называется *лебеговой интегральной суммой.*

Определение 6.4. Пусть (X, Σ, μ) – пространство с конечной мерой. Функция $f \geq 0$ называется *интегрируемой по Лебегу*, если интегральные суммы Лебега сходятся к одному и тому же числу при $\sup_n(y_{n+1} - y_n) \to 0$. Это число называется *интегралом Лебега* функции f. Оно обозначается $\int_X f(x) d\mu$. Если функция принимает отрицательные значения, то она называется интегрируемой, если обе функции $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и $f_-(x) := (-f)_+(x)$ интегрируемы по Лебегу. При этом $\int_X f(x) d\mu := \int_X f_+(x) d\mu - \int_X f_-(x) d\mu$.

6.2. Основные теоремы

Лемма 1. *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с мерой , f_1, f_2 – измеримые функции. Тогда $f_1 + f_2$ и $f_1 f_2$ – измеримы.*

Доказательство. Имеем:$\mathcal{M}_\alpha(f_1 + f_2) = \cup_{r \in \mathbb{Q}} \mathcal{M}_r(f_1) \cap \mathcal{M}_{\alpha - r}(f_2)$, откуда и из того, что Σ есть σ-алгебра следует измеримость суммы.

С другой стороны, $f_1 f_2 = (f_1 + f_2)^2/4 \; - \; (f_1 - f_2)^2/4$, откуда и следует утверждение леммы.

Определение 6.5. Говорят, что последовательность $\{f\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f *почти всюду* (п. в.), если она сходится во всех точках, кроме множества точек нулевой меры (т. е. множества, которое можно покрыть счётной суммой измеримых множеств сколь угодно малой меры).

Лемма 2. *Пространство измеримых функций замкнуто относительно сходимости почти всюду.*

Доказательство. Не ограничивая себя в общности, можно считать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится всюду к f. Но согласно определению предела, если $\lim a_n > c$, то $\exists k \; \exists n : \forall m \geq n \; a_m > c + 1/k$, значит,

$$\mathcal{M}_\alpha(f) \; = \; \cup_k \cup_n \cap_{m > n} \mathcal{M}_{\alpha + 1/k}(f_n),$$

откуда и следует измеримость f. □

Теорема 6.1 (Егоров). *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, на котором последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится почти всюду к функции f. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое измеримое множество X_δ, что $\mu(X_\delta) > \mu(X) - \delta$ и на множестве X_δ последовательность $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f равномерно.*

Доказательство. 0.1. Если B_i измеримы, $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ и $B = \cap_i B_i$, то $\lim \mu(B_i) = \mu(B)$ (это простое следствие σ-аддитивности).

1. Согласно лемме 2 функция f измерима, а следовательно, измеримы все множества $A_{mn} := \cap_{k\geq n}\{ x \mid |f_k(x) - f(x)| < 1/m\}$, состоящее из тех x, для которых для всех $k \geq n$ выполнено неравенство $|f_k(x) - f(x)| < 1/m$. Но тогда (из-за того, что Σ является σ–алгеброй) будут измеримы множества $A_m = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_{mn}$. Из определения A_m сразу следует, что если x не принадлежит A_m, то $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$, и значит, $\mu(A_m) = \mu(X)$ (i). Учитывая, что $A_{m1} \subset A_{m2} \subset \cdots$, из 0.1 получаем, что существует $N(m)$ такое, что $\mu(A_m \setminus A_{mN(m)}) < \delta/2^{-m}$ (ii).

2. Осталось показать, что множество $X_\delta := \cap_{m\in\mathbb{N}} A_{mN(m)}$ – искомое. Имеем

$$\mu(X \setminus A_{mN(m)}) \overset{(i)}{=} \mu(A_m \setminus A_{mN(m)}) \overset{(ii)}{<} \delta/2^{-m}$$

Откуда

$$\mu(X \setminus X_\delta) \overset{def}{=} \mu\Big(X \setminus \cap_{m\in bfN} A_{mN(m)}\Big) \overset{Id}{=} \mu\Big(\cup_{m\in\mathbb{N}}(X \setminus A_{mN(m)})\Big) \leq$$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(X \setminus A_{mN(m)}) < \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta/2^{-m} = \delta.$$

А из определений сразу следует, что если $x \in X_\delta$,то для любого m $|f_k(x) - f(x)| < 1/m$ при $k > N(m)$.

$\square$

Мы привели определение интеграла Лебега, следуя самому Лебегу. Но существуют и другие вполне естественные определения того же понятия.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ заданная на пространстве с мерой (X, Σ, μ) называется *простой*, если она измерима и принимает не более, чем счетное число значений.

Очевидно, что простая функция f измерима тогда и только тогда, когда все множества $\{x \mid f(x) = \text{const}\}$ измеримы, и что любая измеримая функция является равномерным пределом простых (например, последовательности $\{f_n\}$, $f_n(x) = m/n$, если $m/n \leq f(x) < (m+1)/n$). Простая функция $f(x) = y_k$ при $x \in X_k$ называется *интегрируемой по Лебегу* (или *суммируемой*), если ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \mu(X_n)$ абсолютно сходится. Сумма этого ряда называется *интегралом от f по мере μ* и обозначается $\int_X f(x)d\mu$.

Упражнение 6.4. Докажите, что интеграл Лебега является линейным функционалом на пространстве простых функций.

Отметим такое очевидное свойство: *ограниченная простая функция, заданная на пространстве с конечной мерой интегрируема и при этом удовлетворяется неравенство*

$$|\int_X f(x)d\mu| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|\mu(X). \tag{1}$$

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$, заданную на пространстве с мерой (X, Σ, μ), назовем *интегрируемой по Лебегу* (или *суммируемой* или *принадлежащей* $\mathcal{L}(X)$ или $\mathcal{L}_1(X)$) если существует последовательность простых интегрируемых на X функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходящаяся к f равномерно. Предел $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu$ называется *интегралом Лебега от функции* fи обозначается $\int_X f(x)d\mu$.

Корректность этого определения (существование предела, независимость его от выбора последовательности и совпадение двух определений для простых функций) сразу следует из неравенства

$$|\int_X f_n(x)d\mu - f_m(x)d\mu| \le \mu(X)\sup_{x\in x}|f_n(x) - f_m(x)|.$$

Отметим следующие простейшие свойства интеграла:

1.*Интеграл Лебега является линейным функционалом на пространстве суммируемых функций.*

2. Ограниченные на X измеримые функции суммируемы.

3. Если функция $\varphi \in \mathcal{L}(X)$, $\varphi(x) \ge 0$, а функция f измерима на X и $|f(x)| \le \varphi(x)$ почти всюду, то $f \in \mathcal{L}(X)$.

Свойства 1. и 2. для простых функций были отмечены ранее, свойство 3. для простых функций очевидно. Отсюда предельным переходом доказываем эти свойства для произвольных функций.

Из последнего свойства немедленно следует, что

4.*интегралы $\int_X f(x)d\mu$ и $\int_X |f(x)|d\mu$ существуют или не существуют одновременно.*

Упражнение 6.5. Докажите, что если $X = \cup_{n\in\mathbb{N}}X_n$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, и ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{x_n}|f(x)|d\mu$ сходится, то $f \in \mathcal{L}(X)$ и при этом

$$\int_X f(x)d\mu \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{X_n} f(x)d\mu.$$

Отсюда сразу следует, что если $f \in \mathcal{L}(X)$ и $A \in \Sigma$, то $f \in \mathcal{L}(A)$.

Основные теоремы теории интеграла Лебега

Теорема 6.2 (об абсолютной непрерывности интеграла). *Допустим, что* (X, Σ, μ) *– пространство с конечной мерой и* $f \in \mathcal{L}(X)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое что для любого измеримого подмножества* A, *меры, не превосходящей* δ, *выполнено неравенство*

$$|\int_A f(x)d\mu| < \varepsilon.$$

Доказательство. 0.1. Неравенство (1). 0.2. Утверждение упражнения 6.2. 1. Из 0.1 следует, что для ограниченных функций утверждение теоремы верно. Пусть f неограничена. Положим

$$X_n := \{x \mid n-1 \le |f(x)| < n,\ n \in \mathbb{N},\ A_N := \cup_{n=1}^N X_n, B_N := X \setminus A_N\}.$$

Тогда из 0.2

$$\int_X |f(x)|d\mu = \sum_{n \in N} \int_{X_n} |f(x)|d\mu$$

Выберем N и δ так, чтобы (такая возможность следует из сходимости ряда):

$$\int_{B_N} |f(x)|d\mu < \varepsilon/2, \quad 0 < \delta < \varepsilon/2N, \quad A \in \Sigma, \mu(A) < \varepsilon/2 \qquad (i)$$

Тогда будем иметь

$$|\int_A f(x)d\mu| \le \int_A |f(x)|d\mu \overset{0.2}{=} \int_{A \cap A_N} + \int_{A \cap B_N} \overset{(i)}{<} \varepsilon.$$

□

Теорема 6.3 (Лебега об ограниченной сходимости). *Пусть задано пространство* (X, Σ, μ) *с конечной мерой и* $\{f_n\}$ *— последовательность измеримых на* X *функций, сходящаяся к* f *почти всюду. Тогда, если* $\varphi \ge 0, \varphi \in \mathcal{L}(X)$ *и* $|f(x)| \le \varphi(x)$, *то* $f \in \mathcal{L}(X)$ *и при этом*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)d\mu \ = \ \int_X f(x)d\mu.$$

Доказательство. 0.1 Свойство 3. интеграла Лебега. 0.2. f и $|f|$ принадлежат $\mathcal{L}$ одновременно. 0.3. Теорема 6.2. 0.4. Теорема Егорова

1. Интегрируемость f следует из 0.1.
2. Задавшись $\varepsilon > 0$, найдем такое $\delta > 0$,что (в силу 0.3)

$$\int_A \varphi(x)d\mu < \varepsilon \ \forall A \in \Sigma, \mu(A) < \delta, \qquad (i)$$

а по этому δ найдем (в силу 0.4) такое X_δ, что при $n \ge N$ на X_δ сходимость равномерная и $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$ (ii) и, наконец, найдем такое N, что на X_δ при $n \ge N$ получаем: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Тогда, как нетрудно понять,

$$|\int_X f(x)d\mu - \int_X f_n(x)d\mu| \le C\varepsilon.$$

□

Теорема 6.4 (Беппо Леви). *Пусть на пространстве с конечной мерой (X, Σ, μ) задана возрастающая последовательность интегрируемых функций с равномерно ограниченными интегралами:*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots, \ \int_x f_n(x) d\mu \le K \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда почти всюду на X существует конечный предел

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ f \in \mathcal{L}(X)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu \ = \ \int_X f(x) d\mu$$

(доказательство см. в учебнике Колмогорова и Фомина).

Обозначим через $\mathcal{L}_1(X)$ совокупность классов эквивалентных функций из $\mathcal{L}$ относительно эквивалентности $f \sim g \Leftrightarrow \mu\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = 0$ Положим

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_1(X)} \ = \ \int_X |f(x)| d\mu.$$

Упражнение 6.6. Доказать, что полученное выражение удовлетворяет аксиомам нормы.

Теорема 6.5 (Ф. Рисса о полноте $\mathcal{L}_1(X)$). *Пусть (X, Σ, μ) –пространство с конечной мерой. Тогда пространство $\mathcal{L}_1(X)$ полно.*

Доказательство. 0.1. Теорема Б. Леви.

1.

Лемма 3 (Фату). *Если последовательность измеримых неотрицательных функций $\{f_n\}$ сходится почти всюду к f и при этом $\int_X f_n(x) d\mu \le K$, то $f \in \mathcal{L}(X)$ и*

$$\int_X f(x) d\mu \le K.$$

Действительно, положим $\varphi_n(x) = \inf_{k\ge n} f_n(x)$. Эта функция измерима (докажите !) и при этом

$$0 \le \varphi_n(x) \le f_n(x), \int_X \varphi_n(x) d\mu \le \int_X f_n(x) d\mu \le K, \ \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots,$$

и кроме того, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ почти всюду. Применяя 0.1, получаем требуемое.

2. Пусть f_n – фундаментальная последовательность, т.е.

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}_1(X)} \to 0, \ n, m \to \infty.$$

Найдем возрастающую последовательность $\{n_k\}, k \in \mathbb{N}$ такую, что

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{L}_1(X)} \le 2^{-k}. \qquad (i)$$

Тогда из 0.1 следует, что ряд $|f_{n_1}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| + \cdots$ сходится. Но тогда и ряд $f_{n_1}(x) + f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x) + \cdots$ сходится почти всюду к функции

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n_k}(x)$$

Переходя к пределу в (i) и используя лемму Фату, получаем, что $f \in \mathcal{L}_1(X)$ и $\int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|d\mu \le 1/2^{-k}$.

Значит, подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к f, откуда следует, что и вся последовательность сходится.

□

К этим результатам следовало бы добавить теоремы Фубини и Радона – Никодима. Мы сформулируем их, когда они понадобятся.

Расширение понятия интеграла требует значительного расширения понятия длины множества на прямой. Это приводит к концепции *меры Лебега.* Проиллюстрируем ее, сначала на $\mathbb{R}$.

6.3. Описание меры Лебега на отрезке

Для начала, пусть у нас все множества будут подмножествами отрезка $I = [0, 1]$ (или любого конечного отрезка прямой).

Выделим сначала "основные" множества $O(X)$ – интервалы и сегменты (далее $a < b$), а именно: отрезок $[a, b]$, интервал $]a, b[$ и два полуинтервала $[a, b[$ и $]a, b]$.

Длиной или мерой некоторого основного множества $m(\triangle)$ назовем число $b-a$. Любое конечное объединение, пересечние и разность основных множеств назовем *элементарным множеством.* Их совокупность обозначим $Э(X)$. Любое элементарное множество легко представимо в виде конечного объединения основных. В качестве меры $m(A)$ элементарного множества A возьмём число $\sum\limits_{i=1}^{n} m(\triangle_i')$, где $\triangle_i'$ – основные множества, которые не пересекаются и в сумме составляют A. Нетрудно понять, что число $m(A)$ не зависит от способа разложения A на основные.

Так введенная на элементарных множествах мера принимает неотрицательные значения и являнтся (конечно) аддитивной: если $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ и $E_i \bigcap E_j = \emptyset$ при $i \ne j$, то $m(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(E_i)$.

Упражнение 6.7. Доказать, что пересечение, разность и симметрическая разность элементарных множеств элементарны.

Лемма 1 (о счетной полуаддитивности). *Пусть E — элементарное множество и $\{E_n\}_{n\in N}$ – конечная или счетная система элементарных множеств такая, что $E \subset \bigcup\limits_{n} E_n$. Тогда $m(E) \le \sum\limits_{n\in N} m(E_n)$.*

Доказательство. Для множества E найдем замкнутое элементарное множество $F \subset E$ такое, что

$$m(F) \ge m(E) - \varepsilon/2 \qquad (i)$$

(достаточно в каждое из основных множеств $\{\triangle_i\}_{i=1}^{s}$, составляющих E вписать замкнутый сегмент длиной большей $m(\triangle_i) - \varepsilon/2s$).

Для каждого элементарного множества E_n найдем аналогично открытое множество U_n, содержащее E_n и удовлетворяющее условию

$$m(E_n) \ge m(U_n) - \varepsilon/2^{n+1}. \qquad (ii)$$

Но F – компакт. И он покрыт открытыми множествами $\{\bigcup U_n\}$. Выделим из этого семейства конечное подсемейство $\{U_{n_i}\}_{i=1}^{s}$, покрывающее F. Тогда получим $m(F) \le \sum_{i=1}^{s} m(U_{n_i})$ (iii).
(ибо основное множество покрыто конечным семейством основных множеств).

В итоге

$$m(E) \overset{(i)}{\le} m(F) + \varepsilon/2 \le \sum_{i=1}^{s} m(U_{n_i}) + \varepsilon/2 \le \sum_i m(U_i) + \varepsilon/2 \ {}^{(ii)}$$
$$\le \sum_i m(E_i) + \varepsilon/2 + \sum_i \varepsilon/2^{i+1} = \sum_{i\in N} m(E_i) + \varepsilon.$$

□

Определение. *Внешней мерой* множества A назовем число

$$\mu^*(A) = \inf_{A\in\bigcup E_i} \sum_i m(E_i)$$

где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества A конечным или счетным семейством $\{E_i\}$. Множество A называется *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество E, что $\mu^*(A\triangle E) < \varepsilon$.

Функцию μ^*, определённую на измеримых множествах назовем *мерой Лебега.* Будем обозначать ее μ или mes .

Совокупность измеримых множеств обозначим через Σ.

Наша основная цель – доказать, что пара (I, Σ) – измеримое пространство, а тройка $(I, \Sigma, \mathrm{mes})$ – пространство с мерой.

Точнее говоря, требуется доказать, что а) Σ – замкнута относительно операции взятия конечных пересечений и счетных сумм (это и означает, что (I, Σ) является измеримым пространством) и что б) функция mes – σ -аддитивна (а это значит, что $(I, \Sigma, \mathrm{mes})$ являетмя пространством с мерой).

Мы сразу сделаем это в общей ситуации, а пока на упражнениях чуть попривыкнем к мере Лебега на прямой.

Упражнение 6.8. Доказать, что открытое подмножество I измеримо по Лебегу. Какова его мера Лебега?

Упражнение 6.9. Доказать, что замкнутое подмножество I измеримо по Лебегу.

Упражнение 6.10. Найти меру Лебега канторова множества.

Упражнение 6.11. Найти меру Лебега множества рациональных точек на I.

6.4. Построение меры

Понятие меры охватывает следующую систему понятий: длину отрезка, площадь плоской фигуры, объем трехмерного тела, приращение монотонной функции, интеграла от неотрицательной функции и ряд понятий бесконечномерного анализа.

Наша цель здесь определить меру на достаточно широком классе множеств.

Пусть X –некоторое множество, через $\mathcal{E}(X)$ (от every) обозначим совокупность всех подмножеств X.

Множество R подмножеств из $\mathcal{E}(X)$ (от ring) называется *кольцом,* если $A_1, A_2 \in R \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in R, A_1 \cap A_2 \in R, A_1 \setminus A_2 \in R$. Если $X \in R$, то R называется *алгеброй.* Кольцо R называется ***σ*-*кольцом*** (δ-кольцом), если $A_n \in R, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup A_n \in R$ ($\cap A_n \in R$.) Если система множеств и алгебра и σ-кольцо , оно называется *σ-алгеброй.*

Множество S подмножеств из $\mathcal{E}(X)$ (от semiring) называется *полукольцом,* если $A, B \in S \Rightarrow \exists\{C_i\}_{i=1}^{N},\ C_i \cap C_j = \emptyset, i \ne j : A \setminus B = \cup_{i=1}^{N} C_i$

Функция $m : S \to \mathbb{R}_+$ называется *мерой,* если $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$. Мера m называется *монотонной*, если $m(\cup A_n) \le \sum m(A_n)$, и *$\sigma$-аддитивной,* если $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow m(\cup A_n) = \sum m(A_n)$.

Наш исходный пункт: изначально задана система $O(X)$ основных множеств и "предмера" m на нём. По нему строится полукольцо $Э(X)$ элементарных множеств и мера m продолжается на элементарные множества со свойствами аддитивности и монотонности. Далее строится продолжение этой меры на минимальное σ-кольцо Σ, порождённое полукольцом элементарных множеств, и мы приходим к пространству с мерой (X, Σ, μ).

Обозначим через $R(Э(X))$ – минимальное кольцо, порожденное $(Э(X))$. Нетрудно понять, что любое множество $A \in R(Э(X))$ может быть представлено в виде $A = \cup_{k=1}^{n} A_k,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$

Пусть $A \in \mathcal{E}(X)$. *Внешней мерой* $\mu^*(A)$ называется $\inf \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k),\ A \in \cup A_k,\ A_k \in S$. Множество A назовем *измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $B \in R(Э(X))$ такое, что $\mu^*(A \bigtriangleup B) < \varepsilon$. Совокупность всех измеримых множеств обозначим $\Sigma = \Sigma(m)$, внешнюю меру на $\Sigma(m)$ будем обозначать буквой μ. Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат.

Предложение 1. *Всякая мера m на полукольце множеств S однозначно продолжается до меры μ на минимальном кольце $R(S)$, порожденном S (кольце, составленном из конечного числа элементов S путем применения операций пересечения и дополнения).*

Доказательство. Из определения следует, что если $A \in S$, то $A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k, A_k \in R(S), A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j$. Значит, $\mu(A)$ (если она определена), равняется $\sum_{k=1}^{N} m(A_k)$.

Это определение корректно. Действительно, если

$$\bigcup_{k=1}^{N_1} A_k^1 = A = \bigcup_{k=1}^{N_2} A_k^2, A_i^k \bigcap A_j^k = \emptyset, i \neq j, k = 1 \vee 2,$$

то положим $C_{ij} = A_i^1 \bigcap A_j^2$, тогда $A_k^1 = \bigcup_j C_{kj}, A_j^2 = \bigcup_i C_{ij}$. И значит $\sum_i \mu(A_i^1) = \sum_{ij} \mu(C_{ij}) = \sum_j \mu(A_j^2)$

Осталось проверить аддитивность. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k, A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j, A_k \in S$. Положим $A_k = \bigcup_{i=1}^{N_k} C_{ki}, C_{ki} \in \Sigma'$. Тогда $A = \bigcup_{k,i} C_{ki}, m(A) = \sum_{k,i} \mu(C_{ki}) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)$

Пусть теперь задано множество X, полукольцо S и m - полуаддитивная мера на $R(S)$ Для любого $A \in X$ определим верхнюю меру

$$\mu^*(A) = inf \sum_{k \in N} m(A_k) A \subset \bigcup_{k \in N} A_k, A_k \in R(S) \square$$

Предложение 2 (о продолжении меры). *Пусть S – такое полукольцо, что минимальное кольцо $R(S)$ является алгеброй и на S задана аддитивная монотонная мера m. Тогда $(X, \Sigma(m), \mu)$ – является пространством с мерой.*

Доказательство. 1. Мы показали уже, что мера m однозначно распространяется на алгебру $R(S)$. Покажем, что для $A \in R(S)$ $\mu(A) = m(A)$. Действительно, как было сказано выше, существуют непересекающиеся множества $B_k,\ k = 1, ...n$, такие, что $A = \cup_{k=1}^{n} B_k$. Тогда по определению верхней меры (совпадающей с μ)$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m(B_k) =$(из-за монотонности m) $= m(A)$.

С другой стороны, если $A \in R(S)$ и $A \in \cup A_k, A_k \in R(S)$, то (из-за монотонности m) $m(A) \leq \sum m(A_k) =$(на $m(A_k) = \mu(A_k)$) $\sum \mu(A_k)$. И значит, по определению верхней меры, $m(A) \leq \mu(A) \Rightarrow m(A) = \mu(A)$.

Отметим, что из самого определения внешней меры вытекает ее монотонность: $A \in \cup A_k \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$.

2. Покажем, что $\Sigma(m)$ – алгебра. Пусть A_1 и A_2 принадлежат $\Sigma(m)$. В силу включения $A_1 \cup A_2 \bigtriangleup B_1 \cup B_{\in} (A_1 \bigtriangleup B_1) \cup (A_2 \bigtriangleup B_2)$ получаем, что если $A_i, i = 1, 2$ измеримы, то измеримо и их объединение. Аналогично доказывается, что и их пересечение и разность A_1 и A_2 измеримы. А X по определению принадлежит $R(S)$ и значит, $\Sigma(m)$.

3. Покажем,что $\Sigma(m)$ – σ-алгебра. Пусть $A_k \in \Sigma(m)$, $k \in \mathbb{N}$ и $A = \cup A_k$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем (по определению измеримости) множества $B_k \in R(S)$ такие, что $\mu(A_k \triangle B_k) < \varepsilon/2^k$. Положим $B = \cup B_k$. Из включения $\left(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \triangle \left(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \in \cup_{k\in\mathbb{N}}(A_k \triangle B_k)$ вытекает, что $\mu^*(A \triangle B) \leq \varepsilon\ (i)$. Положим $B'_k := B_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} B_i$ при $k > 1$ и $B'_1 := B_1$. Тогда $B'_k \in R(S)$ и $B = \cup_{k\in\mathbb{N}} B'_k$. Поскольку ряд $\sum \mu(B'_k)$ сходится, ибо его члены положительны и частичные суммы ограничены числом $\mu(X)$, найдется такой номер N, сто $\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(B'_k), \varepsilon$. Положим $B' = \cup_{k=1}^{N} B'_k$. Тогда $B' \in R(S)$ и $\mu^*(B \setminus B') < \varepsilon \to \mu^*(A \triangle B') < 2\varepsilon$. Измеримость A доказана.

4. Докажем аддитивномть μ.

Лемма. *Пусть C и D принадлежат $\Sigma(m)$. Тогда имеет место неравенство*

$$|\mu(C)\ -\ \mu(D)| \leq \mu(C \triangle D)(i)$$

Действительно, из включения $A \in B \cup (A \triangle B)(ii)$ и монотонности μ получаем: $\mu(A) \leq \mu(B)\ +\ \mu(A \triangle B)$, что доказывает лемму при $\mu(A) \geq \mu(B)$, при обратном неравенстве доказательство аналогично.Лемма доказана.

Пусть теперь $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_i \in \Sigma(m), i = 1, 2$. Тогда по определению, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $B_i \in R(S)$, $i - 1, 2$, такие, что $\mu(A_i \triangle B_i), \varepsilon\ (iii)$. Тогда из включений (ii) и $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \in A_1 \triangle B_1 \cup A_2 \triangle B_2 (iv)$ получаем

$$\mu(A_1 \cup A_2) \overset{(iv)}{\geq} \mu(B_1 \cup B_2) - \mu((A_1 \triangle B_1 \cup A_2 \triangle B_2) \overset{(ii)}{\geq} \mu(B_1 \cup B_2) - \mu(A_1 \triangle B_1) -$$

$\mu(A_2 \triangle B_2) \geq$ (лемма) $\geq \mu(A_1) + \mu(A_2) - 4\varepsilon$. Аддитивность доказана.

4. Счетная аддитивность меры μ. Пусть $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k, A_i \cap A_j = \emptyset$, $A_k \in \Sigma(m)$. Тогда по доказанному $A \in \Sigma(m)$ и в силу монотонности верхней меры $\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$. В силу доказанной конечной аддитивности имеем: $\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)$, для любого натурального N, откуда получаем, что $\mu(A) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$. □

Замечание. Мы построили теорию меры на полукольце с единицей. Если полукольцо не имеет единицы (как будет, например, на прямой $\mathbb{R}$ или на всем пространстве $\mathbb{R}^n$), то верхнюю меру можно определить лишь на тех множествах A, для которых существует покрытие счетным множеством элементов кольца $\cup B_k$, при котором $\sum \mu(B_k) \infty x$. Определение измеримого множества остается тем же, что и прежде. Доказывается точно также, как в теореме 2, что система множеств, измеримых по Лебегу, является δ-кольцом и изьеримость множества $A = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ имеет место тогда и только тогда когда ряд $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ сходится.

6.5. Примеры и комментарии

Мы осуществили достаточно общую схему построения измеримых множеств. Продемонстрируем это на нескольких примерах.

1. Мера Лебега на прямой. В п.2 речь шла о мере множеств на прямой. Там было выделено полукольцо элементарных множеств, введена мера на нем и доказана ее монотонность. Согласно теореме Лебега о продолжении меры , мы получаем пространство $(I, \Sigma, \mathrm{mes})$ и затем $(\mathbb{R}, \Sigma, \mathrm{mes})$ измеримых множеств на отрезке и на всей прямой с лебеговой мерой на них.

2. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим декартовы произведения основных множеств построенных на прямой (отрезков, интервалов и полуинтервалов). Назовем их основными множествами в $\mathbb{R}^n$. Образуем из них полукольцо и зададим меру на нем, исходя из меры элементарных множеств $m(\Pi_{i=1}^{n} \Delta_i) = \Pi_{i=1}^{n} m(\Delta_i)$. Продолжив меру с полукольца на Σ (совокупность измеримых по Лебегу множеств), получим измеримое пространство сначала на I^n, а затем на $\mathbb{R}^n$.

3. Мера Лебега–Стильтьеса на прямой. Пусть F – некоторая неубывающая, непрерывная слева функция на прямой. Определим меру основных множеств, положив

$$m(a, b] = F(b) - F(a + 0), m[a, b] = F(b + 0) - F(a), m(a, b) = F(b + 0) - F(a + 0),$$

$m[a, b) = F(b) - F(a)$.

Продолжим эту меру на полукольцо элементарных множеств. Она окажется неотрицательной, аддитивной и монотонной. Продолжение по Лебегу этой меры будет, разумеется, зависеть от функции F. Обозначим ее μ_F. Она называется *мерой Лебега–Стильтьеса.* В случае, если $F(x) = x$ мера Лебега–Стильтьеся совпадает со стандартной мерой Лебега.

Среди особенно важных функций F отметим "гауссовское распределение" $F(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\xi^2/2)d\xi$.

4. Мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Реализуем окружность $\mathbb{T}$ стандартно, как единичный круг в комплексной плоскости. В качестве основных множеств возьмем дуги–интервалы, полуинтервалы и отрезки ($\{z \mid \varphi_1 < argz < \varphi_2$ и т.д.). Меру на основных множествах зададим естественным путем, как длину дуги. Далее образуем, как и обычно, полукольцо элементарных множеств и продолжим меру до меры Лебега. Получим алгебру измеримых по Лебегу множеств на $\mathbb{T}$.

5. Мера Винера. Рассмотрим в пространстве $C(I,\Gamma_0)$ непрерывных функций на отрезке $I = [0,1]$, обращающихся в нуль в нуле, подмножества вида

$$C(\tau_1,\cdots,\tau_n;\Delta_1,\cdots,\Delta_n) := \{x(\cdot)\in C(I,\Gamma_0) \mid x(\tau_k)\in\Delta_k,\ 1\le k\le n\}$$

где $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n$, а Δ_i – элементарные множества на прямой. Эти множества образуют полукольцо. Положим

$$m(C(\tau_1,\cdots,\tau_n;\Delta_1,\cdots,\Delta_n) :=$$

$$\pi^{-(n-1)/2)}\Pi_{k=1}^{n}(\tau_{k+1}-\tau_k)^{-1/2}\int_{\Delta_1}\cdots\int_{\Delta_n}\exp\big(-\sum_{k+1}^{n-1}\frac{(t_{k+1}-t_k)}{(\tau_{k+1}-\tau_k)}dt_1\cdots dt_n\}$$

Эта функция является мерой на полукольце элементарных множеств, построенном нами выше. Если ее продолжить по Лебегу, то получается замечательная мера в пространстве непрерывных функций, называемая *мерой Винера.*

Построенные нами меры являются продолжениями мер, которые мы начали изучать еше в школе. Скажем, круги на плоскости, разумеется, измеримы по Лебегу и имеют меру πr^2. То же самое можно сказать про пирамиды, цилиндры, шары, конусы и т.п. в $\mathbb{R}^3$. Открытые множества на прямой – это объединение счетного числа отрезков. Они измеримы и их меры равны сумме длин составляющих их отрезков. Замкнутые множества также измеримы.

И вообще, ни одного неизмеримого по Лебегу множества "конструктивно" не построено. Однако, возможно построить неизмеримое множество, базируясь на аксиоме выбора.

Мы построили меру Лебега на окружности $\mathbb{T}$. При этом по самому построению, мера множества и "сдвинутого" множества(т.е. полученного из данного умножением на число по модулю равное единице) одно и то же. А теперь приступим к нашему построению.

Введем следующее отношение эквивалентности: $z \sim z'$,если существует такое цулое n, что $z' = ze^{in}$. *Выберем из каждого класса эквивалентности по точке* (согласно аксиоме выбора !). Обозначим это множество A_0, и через A_n обозначим множество, получаемое из A_0 умножением на число e^{in}. Легко понять, что множества A_n попарно не пересекаются и их объединение равно $\mathbb{T}$. Отсюда в силу $|sigma$-аддитивности меры, мы (если бы A_0 было измеримо) должны были бы прийти к равенству $1 = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\mu(A_n)$, что невозможно, ибо по сказанному выше, множества A_n должны иметь одну и ту же меру.

Исторический комментарий. Понятия площади и объема– одно из самых важных понятий геометрии. Первые формулы для площадей втречаются в египетских папирусах. У Евклида дается определение площади многоугольников и объема пирамиды. Архимед дал определение площадей криволинейных фигур на плоскости и объемов пространственных тел. Он вычислил площади сегментов параболы и объемы шара, цилиндра, конуса и т.п. Его исследования были продолжены в эпоху Возрождения (Кавальери, Кеплер, Ферма). Эти исследования привели Ньютона и Лейбница к созданию интегрального исчисления. Об эволюции понятия интеграла было сказано в начале главы. Итогом явилось построение меры Лебега и интеграла Лебега (который нам еще предстоит изучить).