7. Гармонический анализ.

7.1. Гармонический анализ на простейших многообразиях

Примеры многообразий

Многообразие $\mathcal{M}$ – это топологическое пространство, которое локально устроено, как пространство $\mathbb{R}^n$. Это значит, что существуют гомеоморфные окрестностей $f : U \to V$ окрестностей U многообразия на шары $V \subset \mathbb{R}^n$.

Привычным для всех нас подобным отображением является карта какого-то участка земной поверхности. И в общей ситуации такие отображения (в области в $\mathbb{R}^n$, задаваемые парами (U, f))также называются *картами*, а их набор называется *атласом многообразия*. Нас (т. к. мы занимаемся анализом) будут интересовать "гладкие" многообразия, т. е. такие многообразия, что отображения $f\tilde{f}^{-1}$ на пересечении областей $U \cap \tilde{U}$ карт (U, f) и $(\tilde{U}, \tilde{f})$ являются гладкими отображениями между областями в $\mathbb{R}^n$. На многообразиях удается перенести основные конструкции классического анализа – дифференциальное и интегральное исчисление.

Но нас будут интересовать и специальные многообразия – *однородные пространства*, т. е. многообразия, на которых транзитивно действует некоторая группа преобразований $\mathcal{G} = \{g\}$ $(g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ & $\forall\ x,\ x' \in \mathcal{M}\ \exists g \in \mathcal{G} : gx = x')$. (При этом в наиболее важных случаях сами группы будут иметь структуру аналитических многообразий, это так называемые *группы Ли*, но коснуться этого нам не удастся.)

На однородных пространствах классический анализ приобретает дополнительные возможности, связанные с построением *гармонического анализа*, т. е. ортонормированных базисов, состоящих из специальных функций с определенными свойствами инвариантности относительно сдвигов группы.

Приведем примеры некоторых важнейших многообразий (все они являются и однородными пространствами, построенными с помощью действующих на них групп).

Пример 7.1. *Одномерные многообразия: окружность $\mathbb{T}$, прямая $\mathbb{R}$ — многообразия без края и отрезок $[a, b]$ — многообразие с краем.*

Прямая $\mathbb{R}$ сама является одномерным евклидовым пространством. Она была предметом нашего специального подробного изучения, не будем об этом здесь еще раз напоминать. Скажем лишь ещё раз, что прямая многолика, и в частности, она имеет множество реализаций (в качестве многообразия) и ещё одну из них ("прямую Лобачевского") вскоре мы кратко опишем.

Окружность $\mathbb{T}$ также имеет несколько обликов. Самый обычный – таков: $\mathbb{T} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ или еще $\{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$. Стереографическая проекция показывает, что окружность локально устроена как прямая.

Окружность можно определять, еще как фактор $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (отображение $t \mapsto e^{2\pi it}$ задает гомеоморфизм $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $\mathbb{T} = \{z \mid |z| = 1\}$), и реализовывать как отрезок (например, $[-\pi, \pi]$) с отождествлёнными концами.

Оба многообразия — $\mathbb{T}$ и $\mathbb{R}$ — имеют *метрическую структуру* и *структуру однородного пространства.* Метрика на $\mathbb{R}$ при обычной, "числовой" интерпретации, задается соотношением $d(x,y) = |x-y|$, метрика на $\mathbb{T}$ – формулой $d(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) = |\varphi_1 - \varphi_2| \quad (\pi < \varphi \leq \pi)$.

На $\mathbb{R}$ действует группа сдвигов : $\mathcal{G} = \{g_a\}, \quad g_a x = x + a$, на $\mathbb{T}$ – группа поворотов – $SO(2) = \{g_\alpha\}$, сопоставляющая точке $e^{i\varphi}$ точку $e^{i(\varphi+\alpha)}$. Если рассмотреть первую интерпретацию, то сдвиг опишется формулами: $g_\alpha(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$

$$x_1' = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha, \quad x_2' = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha.$$

Описанные метрики инвариантны относительно сдвигов. Отметим еще, что и прямая и окружность представляют собой примеры групп (причем групповая операция на них коммутативна; такие группы называют, об этом уже было сказано, *абелевыми*).

Кроме того, как мы помним, и на прямой и на окружности нами была построена *мера* (Лебега), которая также инвариантна относительно сдвигов. Такая мера может быть построена и на других группах и однородных пространствах. Ее называют *мерой Хаара.*

В заключение опишем еще одну реализацию прямой и окружности. Окружность можно реализовать, как совокупность всех прямых. проходящих через некоторую точку евклидовой плоскости (например, через начало координат). Расстояние между прямыми можно измерять острым углом между ними, а в качестве группы рассмотреть всю ту же группу поворотов. Подобное рассмотрение в многомерном случае приведет нас к понятию *проективного пространства.*

И нечто похожее проделаем и с прямой. Рассмотрим все лучи, исходящие из начала координат, угол которых с осью Ox_1 больше $\pi/4$ и меньше $3\pi/4$. Совокупности таких лучей транзитивно действует группа "гиперболических поворотов":

$$x_1' = x_1 \mathrm{ch}\alpha + x_2 \mathrm{sh}\alpha, \quad x_2' = x_1 \mathrm{sh}\alpha + x_2 \mathrm{ch}\alpha,$$

где (x_1, x_2) точки плоскости $\mathbf{E}^2$, расположенные внутри описанного угла.

Введем расстояние, инвариантное относительно этой группы преобразований. Пусть l и l' – две прямые нашего семейства, причем l проходит через точку $(x, 1)$, а l' – через точку $(x', 1)$. Искомое расстояние можно задать формулой $d(l, l') = \log \frac{x(1-x')}{x'(1-x)}$. Подобное рассмотрение в многомерном случае приводит к понятию n–мерного *пространства Лобачевского.* Это еще одна реализация $\mathbb{R}$. В этой модели точке x прямой ставится в соответствие точка гиперболы $(x, \sqrt{x^2+1})$.

Пример 7.2. *Многомерные многообразия :* $\mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n, \mathbf{S}^n, \mathbb{R}P^n, \mathbf{\Lambda}^n$.

Здесь перечислены n–мерные аналоги $\mathbb{T}$ и $\mathbb{R}$ и еще некоторые однородные пространства, чьи одномерные варианты рассматривались выше.
$\mathbb{R}^n$ – это декартово произведение n экземпляров прямой:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}, \quad d(x, x') = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, x_i'),$$

группа – сдвиги $g_a x = x + a \ (a = (a_1, \cdots, a_n)), \mathcal{G} = \mathbb{R}^n$.
$\mathbb{T}^n$ – это декартово произведение n экземпляров окружности:

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \mid z_i = e^{i\varphi}\},$$

группа – повороты $g_\alpha z = (e^{i(\varphi_1+\alpha_1)}, \cdots, e^{i(\varphi_n+\alpha_n)}),\ \alpha \in \mathbb{R}, \mathcal{G} = \mathbb{T}^n$.

$\mathbf{S}^n$ – это единичная сфера в $n+1$–мерном пространстве:

$$\mathbf{S}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \quad , d(x, x') = \arccos\langle x, x'\rangle,$$

$\langle x, x'\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} x_k x'_k$, группа $\mathcal{G} = O(n+1)$ (группа ортогональных матриц размера $n \times n$), доставляющая пример группы Ли. (Напомним, что матрица A размеров $(n+1) \times (n+1)$ называется ортогональной, если $A^T A = AA^T = Id$; но основным случаем для нас будет двумерная сфера $\mathbb{S}^2$ и ортогональная группа — это группа поворотов).)

А вот ещё два важных примера: $\mathbb{R}P^n$ – это проективное n–мерное пространство, представляющее собой семейство прямых в $n+1$–мерном пространстве, где расстояние измеряется углом между прямыми, а группа $\mathcal{G} = O(n+1)$. Наконец,

$\mathbf{\Lambda}^n$ – это n–мерное пространство Лобачевского, – семейство лучей, исходящих из начала координат, лежащих в конусе $x_{n+1}^2 > \sum_{i=1}^n x_i^2$ с проективной метрикой и группой $\mathcal{G}$, являющейся подгруппой $SL(n, \mathbb{R}^{n+1})$, которая конус переводит в себя.

Примерами групп могут служить (помимо ортогональной группы, о которой говорилось), унитарная группа $U(n)$ и симплектическая группа $Sp(2n)$, группа $GL(n, \mathbb{R})$ невырожденных матриц размера $n \times n$. Но подробно их изучать у нас возможности не будет.

На всех перечисленных однородных пространствах (и многих других) может быть построен гармонический анализ. А что это значит, мы сейчас (во многом эвристически, без особой строгости) продемонстрируем на простейшем примере.

7.2. Теоремы о разложении

Определение 7.1. Векторное пространство X называется *предгильбертовым пространством*, если в нём введено скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}_+$, обладающее свойствами: $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ — билинейное отображение, такое, что $\langle x, x\rangle \geq 0$, причём $= 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Скалярное произведение порождает норму по формуле: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Полное относительно этой нормы предгильбертово пространство называется *гильбертовым пространством.*

Пример 7.3. Пространство $\mathbf{E}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ и его бесконечномерное обобщение — пространство $l_2 = \{x = (x_1, \ldots, x_n \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2 < \infty\}$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i y_i$ доставляют примеры гильбертовых пространств.

Важнейшими для нас гильбертовыми пространствами будут пространства L_2 на однородных пространствах (отрезке, окружности, торе, сфере, сферах $\mathbb{S}^n$, торах $\mathbb{T}^n$, прямой $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$).

Теорема о разложении.

Линейный оператор A гильбертова пространства X в себя называется симметрическим (или самосопряжённым), если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle\ \forall x, y \in X$.

Пример 7.4. В конечномерном случае $\mathbf{E}^n$ такое отображение задаётся в стандартном базисе матрицей $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, у которой $a_{ij} = a_{ji}$; в простейшем случае — евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ — такое отображение задаётся (в базисе $(1,0)$ и $(0,1)$) матрицей $(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}$, у которой $a_{12} = a_{21}$.

Симметрический оператор $A : X \to X$ называется *компактным*, если он ограниченное множество в X переводит в предкомпактное (замыкание которого компактно). Вектор x называется *собственным* для оператора A, если $Ax = \lambda x$ (для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{R}$, называемого *собственным значением*).

Пример 7.5. Симметрический оператор в конечномерном пространстве всегда является компактным. Оператор, определённый на компактном однородном многообразии с симметрическим ядром (примеры таких операторов будут приведены чуть дальше), также является компактным.

Теорема 7.1 (теорема о разложении по собственным векторам). *Пусть X — гильбертово пространство и $A : X \to X$ — симметрический компактный оператор. Тогда в X существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Доказательство фактически одно и то же и для случая двумерного и для бесконечномерного случая. Разберём сначала двумерный случай.

Итак, нам задана матрица $(a_{ij})_{1\le i,j\le 2}$, у которой $a_{12} = a_{21}$. Для нахождения первого собственного вектора рассмотрим экстремальную задачу:

$$\langle Ax, x\rangle \to \max,\ \langle x, x\rangle = 1 \Leftrightarrow a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}^2 \to \max,\ x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Решение задачи существует из-за принципа компактности. Обозначим его f_1. Согласно правилу множителей Лагранжа найдётся число λ_1 такое, что для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, -1, \lambda_1) = -\langle Ax, x\rangle + \lambda\langle x, x\rangle$ [8] выполнено равенство

$$\mathcal{L}_x(f_1, -1, \lambda_1) = 0 \Leftrightarrow Af_1 = \lambda_1 f_1.$$

Пусть f_2 — единичный вектор ортогональный f_1. Тогда $0 = \lambda\langle f_1, f_2\rangle = \langle Af_1, f_2\rangle = \langle f_1, Af_2\rangle$. мы видим, что вектор Af_2 ортогонален f_1, а значит, он пропорционален f_2, т. е. $Af_2 = \lambda_2 f_2$, что и требовалось.

В конечномерном случае доказательство аналогично. Рассмотрение задачи

$$\langle Ax, x\rangle \to \max,\ \langle x, x\rangle = 1,\ x \in \mathbf{E}^n$$

и применение правила множителей Лагранжа приводит к нахождению первого собственного вектора f_1 и первого собственного значения λ_1. Для нахождения второго собственного вектора надо рассмотреть задачу

$$\langle Ax, x\rangle \to \max,\ \langle x, x\rangle = 1,\ \langle x, f_1\rangle = 0.$$

[8] легко понять, что множитель при функционале не может быть нулём, и мы положили его равным -1

Решение её обозначим f_2. Применение правила множителей Лагранжа приводит к равенству $Af_2 = \lambda_2 f_2 + \mu f_1$. Скалярное умножение этого равенства на f_1 приводит к тому, что $\mu = 0$, т. е. f_2 — собственный вектор. Повторив эту операцию несколько раз приходим к теореме о разложении в конечномерном случае.

В бесконечномерном случае делается всё то же самое. Решения задач гарантируются компактностью оператора, а правило множителей Лагранжа позволяет последовательно находить собственные векторы одно за другим. Ограничимся этим указанием. □

□

7.3. Гармонический анализ на группах $\mathbb{Z}_n$ и на окружности

Напомним, что однородным пространством называется пара (X, G), где X — множество, а G — транзитивно действующая на X группа преобразований.

Пример 7.6. Пусть $X = \{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\}$. Это множество комплексных чисел, образующих правильный треугольник. Эти числа образуют циклическую группу $G = \mathbb{Z}_3$, которую можно воспринимать, как группу сдвигов X. Будем обозначать пару (X, G) в этом случае $(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$.

Пример 7.7. Пусть $X = \{e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}\}_{k=0}^{2n}\}$. Это множество комплексных чисел, образующих правильный $2n+1$-угольник. Эти числа образуют циклическую группу $G = \mathbb{Z}_{2n+1}$, которую можно воспринимать, как группу сдвигов X, и в итоге получается однородное пространство $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \mathbb{Z}_{2n+1})$.

Опишем инвариантные операторы и их собственные векторы.

Пространство $L_2(\mathbb{Z}_3)$ — это не что иное, как $\mathbf{E}^3$. Определим инвариантный оператор $\Delta x = (T - 2\mathrm{Id} - T^{-1})x$, где T — оператор сдвига, переводящий вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $Tx = (x_3, x_1, x_2)$.

Упражнение 7.1. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора Δ в $\mathbf{E}^3$.

Пространство $L_2(\mathbb{Z}_{2n+1})$ — это не что иное, как $\mathbf{E}^{2n+1}$. Определим инвариантный оператор $\Delta x = (T - 2\mathrm{Id} - T^{-1})x$, где T — оператор сдвига, переводящий вектор $x = (x_1, \ldots, x_{2n+1})$ в вектор $Tx = (x_{2n+1}, x_1, \ldots, x_{2n})$.

Упражнение 7.2. Найдите собственные векторы и собственные значения оператора Δ в $\mathbf{E}^{2n+1}$.

В предыдущей главе была построена мера Лебега на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $-\pi \sim \pi$, инвариантная относительно группы сдвигов. Это дает возможность построить (комплексное или вещественное) пространство $L_2(\mathbb{T})$. Скалярное произведение зададим формулами:

$$\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)\bar{y}(\cdot)\,dt$$

в комплексном и

$$\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)y(t)\,dt$$

в вещественом случаях.

(Такое же построение пространства L_2 удается осуществить на широком классе однородных пространств). Расмотрим оператор $\Delta := \frac{d^2}{dt^2}$ с периодическими краевыми условиями: $x(-\pi) = x(\pi), \dot{x}(-\pi) = \dot{x}(\pi)$. Этот оператор не является ограниченным (из своей области определения в пространство L_2), однако, обратный к нему – интегральный оператор – является симметричным и компактным оператором. По теореме Гильберта, существует ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{T})$, состоящий из собственных векторов этого интегрального оператора, а следовательно, и самого оператора Δ. На окружности эти собственные функции легко находятся. В комплексном случае это – экспоненты $\{e^{ik\cdot}\}_{k\in\mathbf{Z}}$, в вещественном – $\{\cos k\cdot, \sin k\cdot\}_{k\in\mathbf{Z}_+}$. Это дает возможность любую функцию $x(\cdot)$ из $L_2(\mathbb{T})$ разложить в ряд Фурье по собственным функциям. В комплексном случае – в ряд

$$x(\cdot) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k e^{ik\cdot}, \quad x_k = (x(\cdot), e^{ik\cdot}),$$

в вещественном – в ряд

$$x(\cdot) = \sum_{k\in\mathbf{Z}_+} (a_k \cos k\cdot + b_k \sin k\cdot),$$

$a_k = (x(\cdot), \cos k\cdot), b_k = (x(\cdot), \sin k\cdot)$.

Окружность $\mathbb{T}$ можно рассматривать, как однородное пространство, на котором действует группа сдвигов $g_\tau : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $g_\tau t = t + \tau$. Эта группа сдвигов порождает унитарное преобразование пространства $L_2(\mathbb{T})$ в себя: $T_\tau x(\cdot) = x(\cdot + \tau)$. Операторы $\{T_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ удовлетворяют соотношениям:

$$T_0 = Id,\ T_\tau T'_\tau = T_{\tau+\tau'}.$$

В этом случае говорят, что $\tau \mapsto T_\tau$ – есть регулярное представление группы $\mathbb{T}$. Фактически выше было доказано, что пространство $L_2(\mathbb{T})$ оказалось разложенным в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно сдвига. (В вещественном случае: одномерного пространства констант и счетного числа двумерных подпространств, натянутых на функции $\{\sin k\cdot, \cos k\cdot\}_{k\in\mathbb{N}}$.) Этот результат и может быть обобщен на другие группы Ли и однородные пространства.

В принципе мне хотелось бы подготовить читателя к восприятию следующей общей концепции. Пусть G – группа Ли, H – ее замкнутая подгруппа, $\mathcal{M} = G/H$ – однородное пространство группы G. Рассмотрим алгебру $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ линейных дифференциальных операторов, инвариантных относительно сдвига группы. Под гармоническим анализом на однородном пространстве $\mathcal{M}$ понимается разложение функций на $\mathcal{M}$ по собственным функциям операторов из $\mathcal{D}$. Такую концепцию в мои *студенческие годы я воспринял от Феликса Александровича Березина (1930 – 1980), замечательного ученого и человека, трагически погибшего в расцвете своего таланта. Исследования Березина были вдохновлены И. М. Гельфандом.*

Будем рассматривать параллельно два многообразия – окружность и двумерную сферу. Окружность имеет два обозначения $\mathbf{T}^1$ и $\mathbf{S}^1$. И это неспроста:у нее имеются два обличья: с одной стороны она – однородное пространство, на котором действует группа $SO(2)$, а с другой стороны она – компактная абелева группа. Поэтому гармонический анализ на $\mathbf{T}^1 = \mathbf{S}^1$ можно построить двояко: как гармонический анализ на абелевой группе (но этот подход останется вне наших рассмотрений) и как гармонический анализ на однородном пространстве (этот путь был намечен в начале этого пункта). Сейчас мы параллельно расскажем о гармоническом анализе на окружности и двумерной сфере. Мы будем сначала смело двигаться вперед без обоснований, которые приведем впоследствии.

Итак:

1. Окружность $\mathbf{S}^1$ – одномерное компактное многообразие, определяемое уравнением: $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

$1'$. Двумерная сфера $\mathbf{S}^2$ –двумерное компактное многообразие, определенное уравнением: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

2. В полярных координатах окружность задается соотношениями: $x_1 = \cos\varphi,\ \ x_2 = \sin\varphi, 0 \le \varphi < \ 2\pi$.

$2'$. В сферических координатах двумерная сфера задается соотношениями:

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, x_2 = \sin\theta\sin\varphi, x_3 = \cos\theta, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta \le \pi.$$

3. На $\mathbf{S}^1$ действует группа $SO(2)$ – поворотов плоскости вокруг начала координат.

$3'$. На $\mathbf{S}^2$ действует группа $SO(3)$ всех ортогональных преобразований трехмерного пространства с определителем единица.

4. На окружности действует оператор второго порядка, инвариантный относительно сдвига. Это – оператор $\Delta = -\frac{d^2}{d\varphi^2}$.

$4'$. На двумерной сфере действует оператор второго порядка, инвариантный относительно сдвига. Это – оператор Бельтрами–Лапласа

$$\Delta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}.$$

(Алгебра операторов, инвариантных относительно сдвига, состоит из полиномов от Δ.)

Найдем собственные функции операторов, инвариантных относительно сдвига.

5. В случае окружности для этого нужно решить уравнение $-\ddot{z} = \lambda z$ с краевым условием $z(0) = z(2\pi),\ \dot{z}(0) = \dot{z}(2\pi)$,

Решая это уравнение, получаем: $\lambda = n^2,\ n \in \mathbb{Z}_+$ и при этом нулевое собственное число имеет одномерное пространство собственных функций, а именно – констант, а n–тому собственому значению соответствует двумерное подпространство функций, натянутых на $\sin n\cdot, \cos n\cdot$. Эти функции образуют полную ортогональную систему в $L^2(\mathbf{S}^1)$.

$5'$. На сфере решаем уравнение $\Delta z = \lambda z$ методом разделения переменных. Положив $z(\theta, \varphi) = \xi(\varphi)\eta(\theta)$ и подставив в уравнение, приходим к равенству:

$$-\frac{\xi''(\varphi)}{\xi(\varphi)} = \frac{\sin\theta(\sin\theta\eta')'}{\eta} + \lambda \sin^2\theta,$$

при условии периодичности по φ и ограниченности по θ. Из написанного равенства следует, что и левая и правая части этого равенства суть константы, а из условия периодичности по φ следует, что эта константа равна n^2. Тогда второе равенство становится уравнением, которое после замены переменных $t = \cos\theta,\ X(t) = \eta(\theta)$, приводит к уравнению:

$$\frac{d}{dt}((1-t^2)\frac{dX}{dt}) + (\lambda - \frac{n^2}{1-t^2})X = 0,\ -1 < t < 1.$$

Решая это уравнение, получаем, что $\lambda = n(n+1), n \in \mathbb{Z}_+$ n–тому собственному значению соответствует $2n+1$–мерное пространство собственных функций, натянутых на $\sin k\varphi P_n^{(k)}(\cos\theta), \cos k\varphi P_n^{(k)}(\cos\theta),\ k = 0, \cdots, n$, где $P_n^{(k)}(\cdot)$ – при $k = 0$ – *полиномы Лежандра*, а при остальных k – так называемые *присоединенные полиномы Лежандра.* (Об этих функциях будет подробнее рассказано в следующем пункте, а пока нужно иметь ввиду лишь, что выписанные функции на сфере образуют полную ортогональную систему в $L_2(\mathbf{S}^2)$.) Эти функции называются *сферическими.*

И наконец, – апофеоз гармонического анализа на том уровне, на котором он представлен в этом курсе, – разложение "произвольной" функции в ряд по собственным функциям оператора Бельтрами–Лапласа.

6. В случае окружности это – разложение в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{r\in\mathbb{Z}_+}(a_k\cos kt + b_k\sin kt), a_k =< x(\cdot), \cos\cdot >, b_k =< x(\cdot), \sin\cdot > .$$

6'. На сфере разложение по сферическим функциям имеет вид:

$$x(\theta, \varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{n}(A_{nk}\cos k\varphi + B_{nk}\sin k\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta),$$

где коэффициенты Фурье определяются через скалярное произведение $x(\cdot,\cdot)$ с нормированными сферическими функциями.

Следующий пункт будет посвящен некоторым обоснованиям.

7.4. Полиномы и присоединенные полиномы Лежандра.

Найдем полином степени n со старшим коэффициентом 1 наименьшего уклонения в метрике $L_2([-1, 1])$. Иначе говоря, решим задачу

$$f(x) := \int_{-1}^{1}(t^n + \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1})^2 dt \to \inf .$$

Из принципа компактности Вейерштрасса следует, что решение $\hat{x}$ существует. Обозначим $x_n(t) := t^n + \sum_{k=1}^n \hat{x}_k t^{k-1}$. По теореме Ферма $f'(\hat{x}) = 0$. Следовательно,

$$\int_{-1}^{1} x_n(t) t^j dt = 0, \ 0 \le j \le n-1. \qquad (i)$$

Положим (по формуле Лагранжа):

$$X_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-1}^{1} (t-\tau)^{n-1} x_n(\tau) d\tau \Leftrightarrow X_n^{(n)}(\cdot) = x_n(\cdot),$$

$X_n^{(j)}(-1) = 0, 0 \le j \le n-1$. При этом $X_n(\cdot)$ – полином степени $2n$ и из (i) следует, что $X_n^{(j)}(1) = 0, 0 \le j \le n-1$. Иначе говоря, $X_n(\cdot)$ –полином степени $2n$, у которого имеются n–кратный нуль в точке -1 и n–кратный нуль в точке 1, т. е. $X_n(t) = c_n(t^2-1)^n$. Вычислив коэффициент полинома $X_n^{(n)}(\cdot) = x_n(\cdot)$ и приравняв его единице, находим c_n. В итоге получаем:

$$x_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n (t^2-1)^n. \qquad (ii)$$

Полином $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n (t^2-1)^n$ называется *полиномом Лежандра.* Написанное выражение для полинома Лежандра называется *формулой Родрига.* Полиномы Лежандра нормированы так, что $P_n(1) = 1$.Вот начальные полиномы Лежандра:

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = (3t^2-1)/2, \cdot$$

Из определения функций $X_n(\cdot)$ следует ортогональность

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t) dt = 0, \ n \ne m. \qquad (iii)$$

Из формулы Родрига получаем:

$$\gamma_n^2 := \int_{-1}^{1} X_n^2(t) dt \overset{\mathrm{Id}}{=} \int_{-1}^{1} X_n(t)(t^n + \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k t^{k-1}) dt \overset{(iii)}{=}$$

$\frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \Big((\frac{d}{dt})^n (t^2-1)^n \Big) t^n dt =$ (интегрируем по частям) $\frac{(n!)^2}{((2n)!)^2} | \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n dt|$. Вычислив табличный интеграл, получим: $\gamma_n = \frac{2^n (n!)^2}{\sqrt{n+1/2(2n)!}}$. Отсюда следует, что $\{\sqrt{n+1/2} P_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ – ортонормированная система в $L_2([-1,1])$. Ввиду того, что линейная оболочка полиномов Лежандра совпадает с линейной оболочкой всех полиномов, полиномы плотны в пространстве $C([-1,1])$ (теоема Вейерштрасса), а это пространство плотно в $L_2([-1,1])$, нормированные полиномы Лежандра образуют ортонормированный базис в $l_2([-1,1])$. Разложение функции $x(\cdot)$ по полиномам Лежандра имеет вид:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} x_k P_k(t), x_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} x(t) P_k(t) dt.$$

Проинтегрировав по частям, убедимся, что полином степени n , равный $\Big((t^2-1)X_n'(t)\Big)'$ ортогонален всем полиномам степени n, т. е. пропорционален $X_n(\cdot)$, а значит, и $P_n(\cdot)$. Приравнивая старшие коэффициенты, приходим к уравнению, которому удовлетворяют полиномы Лежандра:

$$\Big((t^2-1)P_n'(t)\Big)' + n(n+1)P_n(t) = 0. \qquad (iv)$$

Центральным местом в нашем рассуждении был факт обращения оператора Бельтрами–Лапласа. Обращение оператора Δ проведем на "физическом" уровне строгости. Нам надлежит решить уравнение $\Delta G = \delta - \frac{1}{2\pi}$, где $\delta(\cdot)$ – "дельта–функция". Дельта функция была введена великим английским физиком Дираком, и "определялась" им , как функция, которая равна нулю всюду, кроме нуля, а интеграл от нее равен единице. (А впервые такие вольные операции с δ–функциями проделывал замечательный английский физик и инженер Хевисайд – в конце прошлого века) Этому вольному выражению мы со временем придадим смысл, который удовлетворит нашу математическую щепетильность, но пока обойдемся дираковским определением. Так как производная периодической функции в среднем равна нулю, мы вынуждены были из δ– функции вычесть константу, интеграл от которой равен единице. Функцию G, которую мы ищем, называют *функцией Грина* оператора Δ.

Из определения Дирака "очевидным образом" вытекает формула

$$(x(\cdot), \delta(\cdot)) = x(0),$$

откуда следует разложение δ–функции в ряд Фурье:

$$(e^{ik\cdot}, \delta(\cdot)) = 1/2\pi \ \Rightarrow \delta(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{ikt}. \qquad (1)$$

Интегрируя почленно ряд (1), приходим к выражению:

$$G(t) = -\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikt}}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \ - \ \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\cos kt}{k^2}.$$

А теперь дважды проинтегрируем функцию $\delta(\cdot) \ - \ 1$. При первом интегрировании получим функцию

$$G'(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin kt}{k} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{(t+\pi)}{2\pi} & \text{если } -\pi \le t < 0; \\ 0 & \text{если t=0;} \\ -\frac{(t-\pi)}{2\pi} & \text{если } 0 < t \le \pi, \end{cases} .$$

(Надо учитывать, что при интегрировании δ–функции получается единичный скачок). При втором интегрировании приходим к формуле:

$$G(t) = \frac{|t|}{2} - \frac{t^2}{4\pi} + \frac{\frac{1}{2\pi} - \pi^2}{6},$$

Равномерная сходимость ряда для G следует из теоремы Вейерштрасса, поточечная сходимость ряда для G' вытекает из признака Дирихле. То, что ряды сходятся действительно к тем функциям,которые написаны, нетрудно проверить непосредственно (разлагая эти функции в ряд Фурье).

Отметим, что заодно мы получили формулу $\zeta(2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 1/k^2 = \pi^2/6 = 1/2\pi - G(0)$, о которой говорилось на самой первой лекции , т. е. просуммировали ряд, который не смог просуммировать Лейбниц. Это соотношение получил Эйлер. (Интегрируя дальше, можно найти явные выражения для значений дзета–функции Римана во всех четных точках).