8. Дополнения

8.1. Гармонический анализ на абелевых группах

Гармонический анализ на абелевых группах имеет законченную и очень красивую форму.

Пусть G – локально компактная абелева группа. Это значит, что это – аддитивная группа, являющаяся топологическим пространством, в котором действие группы – непрерывная операция и при этом каждая точка группы имеет окрестность, замыкание которой есть компакт. Чуть далее ьы поговорим об этом подробнее. Приведем важнейшие

Примеры. 1. Группа $\mathbb{Z}_n$ вращений правильного n-угольника.

2. Группа $\mathbb{Z}$ – целых чисел.

3. Группа $\mathbb{T}$ – окружность, описанная нами выше.

4. Группа $\mathbb{R}$ – прямая.

Отображение $\chi: \ G \to \mathbb{T} \in \mathbb{C}$ называется *характером*, если $\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$. Очевидно, что характеры образуют аддитивную группу (относительно умножения: произведение характеров есть характер). Эту группу называют *двойственной* и обозначают G^*. Группа, двойственная локально компактной сама локально компактна. Значение характера g^* на элементе g будем обозначать $\mathrm{ch}(g, g^*)$.

На любой локально компактной группе имеется *мера Хаара* – мера, инвариантная относительно сдвигов. Мера Хаара на G (G^*) обозначается $\mu_G(\mu_{G^*})$.

Мера Хаара дает возможность определить *преобразование Фурье:*

$$\hat{x}(g^*) := \int_G ch(-g, g^*) d\mu_G.$$

При определенных условиях справедлива *формула обращения*:

$$x(g) = \int_{G^*} \hat{x}(g^*) ch(g, g^*) d\mu_{G^*}.$$

Сверткой функций $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, определенных на G называется функция

$$x * y(g) := \int_G x(g - g') y(g') d\mu_G.$$

Опишем характеры, двойственные группы и меры Хаара для тех четырех примеров, которые были приведены выше.

1.$G = \mathbb{Z}_n = \{\exp(2\pi ik/n\}_{k=0}^{n-1}, G^* = \mathbb{Z}_n = \{l\}_{l=0}^{n-1}$ (сложение по модулю n). $\mathrm{ch}(\exp(2\pi ik/n, l) = \exp(2\pi ikl/n)$. $\mu_G(g) = 1, \mu_{G^*}(g^*) = 1/n$.

2. $G = \mathbb{Z} = \{k\}, G^* = \mathbb{T} = \{t\}_{t\in[-\pi,\pi)}$ (сложение по модулю 2π), $\mathrm{ch}(k, t) = \exp(ikt), \mu_{\mathbb{Z}}(k) = 1, d\mu_{\mathbb{Z}^*} = dt/2\pi$.

3. $G = \mathbb{T} = \{\exp it\}_{t\in\mathbb{R}}, G^* = \mathbb{Z} = \{k\}, \mathrm{ch}(\exp(it), k) = \exp(ikt), d\mu_{\mathbb{T}} = dt/2\pi, \mu_{\mathbb{Z}^*}(k) = 1$.

4. $G\mathbb{R} = \{t\}, G^* = \mathbb{R} = \{\tau\}, \mathrm{ch}(t, \tau), d\mu_{\mathbb{R}} = dt, d\mu_{\mathbb{R}^*} = dt/2\pi$.

В компактном случае ($G = \mathbb{Z}_n$ и $G = \mathbb{T}$) характеры образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(G)$. Кроме того, имеет место следующая важнейшая формула: $(G^*)^* = G$ (для локально компактной абелевой группы – теорема Понтрягина).

Задачи.

Задача 1. *Докажите, что оператор* Δ *на* $\mathbb{Z}_n$ *и* $\mathbb{T}$ *– симметричен (т. е.* $(\Delta x(\cdot, y(\cdot)) = (x(\cdot), \Delta y(\cdot))$.

Задача 2. *Найдите собственные функции оператора* $\Delta : \Delta x(k) := x(k+1) - 2x(k) + x(k-1)$ *на* $\mathbb{Z}_n$ *и* $\mathbb{Z}$.

Задача 3. *Докажите, что собственные функции оператора* Δ, *соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.*

Задача 4. *Назовем совокупность* $\mathcal{X}$ *финитных последовательностей пространством основных последовательностей на* $\mathbb{Z}$ *и введем в них следующую топологию. Мы скажем, что последовательность* $X_n = \{x_{kn}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *сходится к* $X = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *если вне некоторого конечного подмножества (одного для всех) все координаты* X_n *и* X *равны нулю а остальные координаты* X_n *сходятся к соответствующим координатам* X. *Описать пространство* $\mathcal{Y}$ *тех последовательностей* $Y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *для которых* $< X, Y >:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_k < \infty \forall X \in \mathcal{X}$ *Как опишется явно топология в* $\mathcal{Y}$, *задаваемая соотношениями:*

$$Y_n \to Y \Leftrightarrow < X, Y_n > \to < X, Y > \forall X \in \mathcal{X}?$$

Задача 5. *Выразите обобщенную функцию* δ *в виде линейной комбинации собственных функций оператора* Δ.

8.2. Векторный анализ

Напомним, что $\mathbf{E}^3$ — это пространство векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ (где x_i — координаты в декартовой системе координат с единичными ортами $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ и $e_3 = (0,0,1)$) со *скалярным произведением* $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Оно равно произведению модулей векторов на косинус угла между векторами. *Векторное произведение* $[x, y]$ (другое обозначение — $x \times y$) — это вектор, задаваемый определителем

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Этот вектор перпендикулярен и вектору x и вектору y, (т. е. плоскости, натянутой на эти векторы) и по модулю равен площади параллелограмма с вершинами 0, x, y, $x + y$. Эти факты легко следуют из определения детерминанта; направление вектора определяется "правилом левой руки".

Пусть $f : \mathbf{E}^3 \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Вектор $\nabla f(x) = (\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_3})$ называется *градиентом* f в точке x. Градиент $\nabla f(\widehat{x})$ перпендикулярен касательному пространству к поверхности $\{x \mid f(x) = f(\widehat{x})\}$ уровня функции f в точке $\widehat{x}$. Если задано (непрерывно дифференцируемое) векторное поле $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$, то его *дивергенцией* в точке x называется величина $\mathrm{div} F(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3(x)}{\partial x_3}$. Вектор $\nabla \times F$ (или, что то же $[\nabla, F]$), определяемый детерминантом

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) \end{vmatrix}$$

называется *ротором* F а точке x и обозначается $\mathrm{rot}F(x)$.

Пусть $q = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ — кватернион, $x_0 = \mathrm{Re}q$ — его вещественная, а $x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k} = \mathrm{Im}q$ — его мнимая часть. Произведение двух кватернионов q и q' имеет такой вид:

$$qq' = \mathrm{Re}q\mathrm{Re}q' - \langle \mathrm{Im}q, \mathrm{Im}q'\rangle + \mathrm{Re}q\mathrm{Im}q' + \mathrm{Re}q'\mathrm{Im}q + [\mathrm{Im}q, \mathrm{Im}q'].$$

Первые два слагаемых — вещественная часть произведения, три следующих — мнимая.

Электромагнитное поле определяется двумя вектор-функциями $\mathbf{E}(t,x)$ и $\mathbf{B}(t,x)$ — электрической и магнитной напряжённости. Их эволюция описывается *уравнениями Максвелла* (в гауссовой системе):

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\ \mathrm{div}\mathbf{H} = 0,\ \mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

где ρ — плотность заряда, c — скорость света, $\mathbf{j}$ — плотность заряда.

8.3. Дифференциальные формы

Исходными здесь являются гладкие (для простоты — бесконечно дифференцируемые) функции f на $\mathbf{E}^3$ (которые будем обозначать $C^\infty(\mathbf{E}^3)$ или $\Lambda^0(\mathbf{E}^3)$ и векторные поля $F : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F_i \in C^\infty(\mathbf{E}^3)$. Обозначим их $V(\mathbf{E}^3)$. Векторные поля можно складывать и умножать на функции из $C^\infty(\mathbf{E}^3)$.

Определение 8.1. Пространство, сопряжённое $V(\mathbf{E}^3)$ (т. е. пространство функционалов $l : V(\mathbf{E}^3) \to C^\infty((\mathbf{E}^3)$, для которых выполнены соотношения: $l(f_1F^1 + f_2F^2) = f_1l(F^1) + f_2l(F^2)))$ назовём пространством *дифференциальных 1-форм* и обозначим $\Lambda^1(\mathbf{E}^3)$.

Ныне общеприняты такие стандартные обозначения: базисные векторы e_i обозначают символами $\frac{\partial}{\partial x^i}$, а двойственный базис обозначают dx^i. Тогда любую 1-форму можно записать в виде $\omega_1 = a_1(x)dx^1 + a_2(x)dx^2 + a_3(x)dx^3$, где $a_i \in C^\infty(\mathbf{E}^3)$.

Определение 8.2. Отображение $b : V(\mathbf{E}^3) \times V(\mathbf{E}^3) \to C^\infty(\mathbf{E}^3$ линейное по каждому переменному и кососимметричное называется *дифференциальной 2-формой.* Такие формы записываются в виде $\omega_2 = a_1(x)dx^2 \wedge dx^3 + a_2(x)dx^3 \wedge dx^1 + a_3(x)dx_1 \wedge dx^2$.

Наконец, выражения вида $\omega_3 = a(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ будем называть *диффереациальной 3-формой.* Пространства соответствующих форм будем обозначать $\Lambda^2(\mathbf{E}^3)$ и $\Lambda^3(\mathbf{E}^3)$.

Для любой дифференциальной формы определяется понятие дифференциала от неё. Для функции это обычный дифференциал: $a \in \Lambda^0(\mathbf{E}^3 \Rightarrow da = \frac{\partial a}{\partial x_1}dx^1 + \frac{\partial a}{\partial x_2}dx^2 + \frac{\partial a}{\partial x_3}dx^3$; если $\omega_1 = a_1(x)dx^1 + a_2(x)dx^2 + a_3(x)dx^3$, то $d\omega_1 = da_1(x)dx^1 + da_2(x)dx^2 + da_3(x)dx^3$; если $\omega_2 = a_1(x)dx^2 \wedge dx^3 + a_2(x)dx^3 \wedge dx^1 + a_3(x)dx_1 \wedge dx^2$, то $d\omega_2 = da_1(x)dx^2 \wedge dx^3 + da_2(x)dx^3 \wedge dx^1 + da_3(x)dx_1 \wedge dx^2$. Из определений следует, что

$$d\omega_1 = \begin{vmatrix} dx^2 \wedge dx^3 & dx^3 \wedge dx^1 & dx^2 \wedge dx^1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1(x) & a_2(x) & a_3(x) \end{vmatrix},$$

$d\omega_2 = \mathrm{div} A$, $A = (a_1, a_2, a_3)$. Из этих определений следует, что $d^2 = 0$. (Проверьте это.) Действие дифференциала приводит к следующей диаграмме:

$$\Lambda_0 \xrightarrow{d} \Lambda_1 \xrightarrow{d} \Lambda_2 \xrightarrow{d} \Lambda_3,$$

которую называют *комплексом де Рама.*

Читателю предоставляется самому выписать дифференциальные формы от двух переменных и определить для них комплекс де Рама

Первые два уравнения системы уравнений Максвелла очень красиво записываются через дифференциальные формы. Положим $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$, $\omega_2 = c(E_1 dx^1 \wedge dt + E_2 dx^2 \wedge dt + E_3 dx^3 \wedge dt) + H_1 dx^2 \wedge dx^3 + H_2 dx^3 \wedge dx^1 + H_3 dx^1 \wedge dx^2$. Тогда уравнения $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, $\mathrm{div}\mathbf{H} = 0$ записываются в виде $d\omega_2 = 0$.

8.4. Формула Ньютона–Лейбница–Грина–Гаусса-Остроградского–Стокса–Пуанкаре

Не имея возможности обсудить эту формулу в общем виде, наметим доказательство её в размерностях, не превосходящих трёх, причём интегрировать будем по единичным шарам. Сама формула (в этих измерениях) имеет вид:

$$\int_{B^n} d\omega_{n-1} = \int_{\partial B^n} \omega_{n-1}. \qquad (*)$$

В одномерном случае это не что иное, как равенство $\int_{-1}^{1} a'(x)dx = a(1) - a(-1)$, т. е. формула Ньютона–Лейбница. Пусть $\omega_1 = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2$. Тогда $d\omega_1 = (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2})dx^1 \wedge dx^2$. Интегрирование формы $\omega_2 = a(x)dx^1 \wedge dx^2$ означает не что иное, как взятие интеграла $\int_{B^2} a(x^1, x^2)dx^1 dx^2$, а интегрирование формы $\int_{\partial B^2} a_1(x^1, x^2)dx^1 + a_2(x^1, x^2)dx^2$ — это не что иное, как $\int_0^{2\pi}(-a_1(\cos t, \sin t)\sin t + a_2(\cos t, \sin t)\cos t)dt$. Соотношение $\int_{B^2} d\omega_1 = \int_{\partial B^2} \omega_1$ (формула Грина) легко выводится из формулы Ньютона-Лейбница. Аналогично выводится соотношение $\int_{B^3} \mathrm{div} A dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{\partial B^3}(a_1(x)dx^2 \wedge dx^3 + a_2(x)dx^3 \wedge dx^1 + a_3(x)dx_1 \wedge dx^2)$. Эта формула называется формулой Гаусса–Остроградского.

Классики прошлого века писали формулы, подобные $(*)$, по-иному. Приведем некоторые “старинные” выражения. Пусть V — ограниченная односвязная область, ограниченная поверхностью ∂V, тогда $\int_V \nabla \cdot F dv = \int_{\partial V} dS \cdot F$ (формула Гаусса–Остроградского). Пусть односвязная поверхность S расположена в $\mathbf{E}^3$ ограничена кривой ∂S, тогда $\int_S dS \cdot (\nabla \times F = \int_{\partial C} dl \cdot F$ (формула Стокса).

Упражнение 8.1. Вычислить обобщённые формулы Архимеда объёмов B^n и ∂B^n (по крайней мере для $n \leq 4$.