Задачи к экзамену по математическому анализу.
2 семестр. Весна 2004г.

Функции комплексного переменного.

1. Найдите действительные и мнимые части чисел
а) $\operatorname{ctg} i$; **б)** $\cos(1+2i)$; **в)** $e^{\sin(1+i)}$; **г)** $(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)^{100}$.

2. Решите уравнения
а) $(1-i)z^2+z+5i-3=0$; **б)** $\mathrm{tgz} = \mathrm{i},$; **в)** $\cos az = 5,\ a \in \mathbb{C}$.

3. Числа $1+i$ и $3-2i$ являются корнями уравнения

$$z^6+az^4+bz^3+cz^2+dz+2=0$$

$(a,b,c,\in \mathbb{R})$. Найдите остальные корни этого уравнения.

4. **а)** Найдите максимальное значение выражения $|z+100-i|-|z-\sqrt{2}+2i|,\ z\in\mathbb{C}$.
б) Найдите минимальное значение выражения $|z|+|z-i|+|z-\sqrt{3}|,\ z\in\mathbb{C}$.

5. Про множество $A\subset\mathbb{C}$ известно, что оно состоит из четырех элементов и переходит в себя при отображении $w=z^2$. Найдите все такие множества.

6. Докажите, что преобразование $w=\frac{az+b}{cz+d}$ переводит любую окружность на комплексной плоскости в окружность или прямую.

7. Какие из следующих функций голоморфны:
а) $f(x+yi)=x^2+y^2$; **б)** $f(z)=z-\bar{z}$; **в)** $f(x+yi)=y^2-x^2-2xyi$;
г) $f(z)=z\cos z$.

8. В каких точках z функция $f(z)=z\,(\mathrm{Re}\ z\ -\mathrm{Im}\ z\ )$ дифференцируема ?

9. Приведите пример функции, которая удовлетворяет условиям Коши- Римана в точке $z=0$, но не дифференцируема в этой точке.

Дифференцирование функций многих переменных.

1. Определить, в каких точках плоскости функция $f(x_1,x_2)$ дифференцируема и найти ее производную в этих точках
а) $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_1x_2}$; **б)** $f(x_1,x_2)=e^{\frac{x_1}{x_2}}$;
в) $f(x,y)=\sqrt{x_1x_2}$; **г)** $f(x_1,x_2)=|x_1+x_2|+|x_1-x_2|$;
д) $f(x_1,x_2)=\max\{x_1^2+x_2^2,\,2x_1\}$.

2. Определить, в каких точках $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $f(x)$ дифференцируемо и найти его производную в этих точках

а) $f(x) = 1/\|x\|$ (норма евклидова); **б)** $f(x) = \langle a, x\rangle \cdot \langle b, x\rangle$ где $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\langle\ ,\ \rangle$– скалярное произведение; **в)** $f(x) = x\|x\|$.

3. Отображение $f : \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие паре векторов $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ угол между ними (в радианах). В каких точках (x, y) оно дифференцируемо ? Найти $f'(x, y)$.

4. Определить, в каких точках $x(\cdot) \in \mathbf{C}[-1, 1]$ функция $f(x)$ дифференцируема и найти ее производную в этих точках

а) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x^2(t)\,dt$; **б)** $f(x) = \ln x(0)$; **в)** $f(x) = x(0) \int_{-1}^{1} x(t)\,dt,$;

г) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t x^2(t)\,dt$.

5. Определить, в каких точках $x(\cdot) \in \mathbf{C}^1[-1, 1]$ отображение $f(x)$ дифференцируемо и найти его производную в этих точках

а) $f(x(t)) = x'(t)$; **б)** $f(x(t)) = e^t x(t),$; **в)** $f(x(t)) = x(-t)$.

6. Приведите пример функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которая разрывна в точке $(0, 0)$, но имеет в этой точке производные по всем направлениям.

7. Приведите пример функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которая дважды непрерывно дифференцируема по каждой из переменных в круге $|x| \leq 1$, но которая не имеет смешанной производной в точке $(0, 0)$.

Теория экстремума.

1. Решить задачи на экстремум:

а)

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k & \to & \sup \\ \sum\limits_{k=1}^{n} k x_i^2 & = & 1. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 3x^2 - xy + y^2 & \to & \inf \\ 9x^2 - 7xy + 3y^2 & = & 15. \end{cases}$$

2. Сумма пяти чисел равна 1, а сумма их квадратов равна 13. Какие значения может принимать сумма их кубов ?

3. Сумма квадратов пяти чисел равна 4, а сумма их кубов равна 0. Чему может быть равна сумма их четвертых степеней ?

4. **а)** Докажите неравенство Коши $x_1^n + \cdots + x_n^n \geq n x_1 \cdots x_n$ для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$.

б) Докажите неравенство Гельдера: для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и для произвольного $p > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\Big)^{1/q},$$

где $q = p/(p-1)$. Для каких последовательностей x_k и y_k неравенство обращается в равенство ?

5. Дан шарнирный четырехугольник (длины сторон фиксированы, углы можно менять). При каком положении его площадь максимальна ?

6. Внутри данного треугольника найти точку, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от данной точки до этих сторон минимальна.

7. Через точку внутри данного угла провести прямую так, чтобы ее отрезок, лежащий внутри угла, имел наименьшую длину.

8. Приведите пример гладких функций $f(x,y), g(x,y)$ таких, что задача $f \to \sup, g = 0$ имеет единственное решение, которое, однако, не является решением системы $L_x = L_y = 0$, где $L = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.

9. Приведите пример дифференцируемой функции F на гильбертовом пространстве l_2, которая ограничена на единичном шаре этого пространства, но не достигает на нем своего максимального значения.

10. Гильбертов кирпич - это множество точек пространства l_2, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x_k| \leq 1/k, \ k = 1, 2, \ldots$. Докажите, что любая непрерывная функция на гильбертовом кирпиче ограничена и достигает наименьшего и наибольшего значения.

11. Решите экстремальные задачи в пространстве l_2:

а) $\sum_{k=1}^{l} \frac{x_n}{n} \to \sup, \ \|x\| = 1;$

б) $\sum_{k=1}^{l} \frac{x_n}{n} \to \sup, \ \|x\| = 1, \ x_1 = x_2.$

12. Найдите расстояние от точки $\left(\frac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ гильбертова пространства до плоскости $\sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} x_k = 0$.

Мера и измеримые функции, интегрирование.

1. На алгебре всех подмножеств рациональных чисел из отрезка $[0,1]$ ввести меру так, чтобы мера каждого рационального числа была положительна, а мера всех рациональных чисел из $[0,1]$ равна 1.

2. Пусть множество $A \subset [0,1]$ измеримо. Доказать, что функция $f(x) = \mu(A \cap [0,x])$ - непрерывна (μ - лебегова мера).

3. Доказать, что в каждом множестве $A \subset [0,1]$ положительной лебеговой меры найдется пара точек, расстояние между которыми **а)** рационально; **б)** иррационально.

4. Построить на плоскости такое измеримое множество, проекции которого на координатные оси неизмеримы.

5. Построить на $[0,1]$ последовательность непрерывных функций, сходящуюся по мере Лебега и расходящуюся в каждой точке.

6. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество A единичного куба $[0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ и A нигде не плотно.

7. Докажите, что неотрицательная измеримая функция f на $[0;1]$ суммируема тогда и только тогда когда сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\{x : f(x) \geq 2^n\}$.

8. При каких значениях параметров α, β функция $x^\alpha \sin(x^\beta)$ определена и интегрируема по Лебегу (несобственно по Риману) на $(0;1]$?

9. Найти первообразные следующих функций: $\frac{1}{(x^4-1)^3}$, $\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}$, $\frac{1}{(x-2)^2(x+3)^3}$, $\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$, $\frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{1}{(1-x^4)\sqrt{x^2+1}}$, $x\sqrt{x^2-2x+2}$, $\frac{1}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$, $\frac{(x^2+1)}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$, $\sqrt[3]{3x-x^3}$, $\frac{1}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

10. При каких условиях следующие интегралы представляют рациональные функции: $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(1-x^2)}\,dx$, $\int \frac{ux^2+2vx+w}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$, $\int \frac{ux^2+2vx+w}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx$.

11. Вычислить интегралы Лебега по отрезку $[0,1]$ **а)** от функции Дирихле; **б)** от функции Римана; **в)** от канторовской сингулярной функции (канторовой лестницы); **г)** от функции $\operatorname{sign}\left(\sin\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$; **д)** от функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k\right)$, где $x = 0,d_1\ldots d_n\ldots$, $\{d_j\}$ - цифры в двоичном разложении числа x (если предел не существует, полагаем $f(x) = 0$).

12. Докажите, что функция f интегрируема на $[0;1]$ по Риману тогда и только тогда когда f – ограничена и п.в. непрерывна.

Пространства функций.

1. Построить последовательность функций $f_n \in L_1[0;1] : f_n(x) \to 0, \forall x \in [0;1]$ при $n \to \infty$; $\int_{[0;1]} |f_n(x)|\, dx \geq c > 0$; последовательность $\{f_n\}$ не имеет предела в $L_1[0;1]$.

2. Пусть $f_n \in L_1(X, \mu)$ – последовательность неотрицательных функций сходится п.в. к функции $f \in L_1(X, \mu)$ и при этом $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$. Доказать, что $f_n \to f$ в смысле сходимости в пространстве $L_1(X, \mu)$.

3. Доказать, что $\int\limits_0^1 f(x) \cos 2\pi n x\, dx \ \to\ 0$ для любой функции $f \in L^1[0,1]$.

4. Докажите, что в $L_1[0;1]$ плотны следующие множества: непрерывные кусочно-линейные функции с конечным числом точек излома; алгебраические многочлены; тригонометрические полиномы.

5. **а)** Пусть $\mu(X) < \infty, 1 \leq q \leq p$. Докажите, что пространство $L_p(X, \mu)$ содержится в $L_q(X, \mu)$. **б)** Докажите, что при $p \neq q$ ни одно из пространств $L_p(\mathbb{R}, \mu)$, $L_q(\mathbb{R}, \mu)$ не содержится в другом.

6. Докажите, что любая точка единичной сферы пространства $L^1[0,1]$ является серединой отрезка длины 2, целиком лежащего на этой сфере.

7. Точка x выпуклого множества A называется *крайней* если не существует пары точек $x_1, x_2 \neq x$ таких, что $x = (x_1 + x_2)/2$.

а) Найдите все крайние точки единичного шара в пространствах l_1, l_2 , l_∞, c_0;

б) найдите все крайние точки единичного шара в пространствах $L_2[0,1]$, $L_\infty[0,1]$, $C[0,1]$.

Ряды Фурье, преобразование Фурье.

1. Разложить в ряд Фурье следующие функции:

a) $ln \left|\sin \frac{x}{2}\right|$;

b) $ln \left|\cos \frac{x}{2}\right|$;

c) $|\sin x|$;

d) $|\cos x|$;

e) $x \sin x$;

f) e^{ax}.

2. Вычислить суммы рядов:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

3. Найдите полную систему собственных функций линейного оператора $[Af](x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$, если

а) $K(x,y) = xy$;

б) $K(x,y) = \min\{x,y\}$;

в) $K(x,y) = \min\{x,y\} - xy$;

г) $K(x,y) = \frac{\min\{x,y\}-xy}{xy(1-x)(1-y)}$.

4. а) Пусть $\{\lambda_k\}$ - последовательность собственных значений компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Доказать, что $\lambda_k \to 0$.

б) Доказать, что для любой последовательности $\{\lambda_k\}$, стремящейся к нулю, существует компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, множество собственных значений которого совпадает с $\{\lambda_k\}$.

5. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}), \hat{f} \equiv 0$. Тогда $f = 0$ п.в.

6. Пусть f – рациональная функция из $L_1(\mathbb{R})$. Тогда найдутся постоянные $c > 0, \delta > 0$ такие, что $|\hat{f}(\lambda)| \leq ce^{-\delta|\lambda|}$.

7. Решить уравнения: a) $y^{(IV)} + 3y'' + 2y = 0$; b)$y^{(IV)} + 7y'' + 12y = 0$.

Кратные интегралы, дифференциальные формы.

1. Вычислить $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$, если

a) $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq ay\}, f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

b) $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq ax\}, f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

c) $D = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}, f(x,y) = x^3y^5$;

d) $D = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}, f(x,y) = x^2$.

2. Вычислить площадь плоской области ограниченной следующей кривой:

a) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$;

b) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2+y^2$.

3. Вычислить объём и площадь поверхности n–мерного шара при $n = 3, 4, 5$.

4. Вычислить объём области в $\mathbb{R}^3$, заданной данной системой неравенств:

a) $x^2+2y^2-z^2 \leq a^2, x^2+2y^2 \geq 4z^2$;

b) $x^2+4y^2 \leq z^2, a^2 \leq x^2+4y^2+z^2 \leq 9a^2$.

5. Найдите $\int_\gamma \omega$, где γ – положительно ориентирована, $a > 0$:

a) $\gamma = \{(x,y) : x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}\}, \omega = y^{5/3}\,dx - x^{5/3}\,dy$;

b) $\gamma = \{(r,\theta) : r = a(1+\cos\theta)\}, \omega = xy^2\,dx - (y^2-x^2)\,dy$.

6. Замкнуты ли следующие дифференциальные формы:

a) $(2zx-1)\,dx + (2zy-1)\,dy + (x^2+y^2-1)\,dz$;

b) $(2xyz+1)\,dx + (x^2z - z^2y + 1)\,dy + (x^2y+1)\,dz$.

7. Верно ли следующее утверждение ? Пусть ω – дифференциальная 1-форма на плоскости с C^1–коэффициентами и интеграл от формы ω по любому пути, соединяющему две данные точки, не зависит от выбора пути. Тогда данная форма является замкнутой.