Задачи по спецкурсу

Представления классических групп

И.В.Аржанцев, весна 2004 г.

1) Для группы SO_8 указать диаграмму Юнга, отвечающую картановской компоненте тензорного произведения двух различных полуспинорных представлений.

2) Разложить тензорное произведение полуспинорных представлений группы SO_8 в сумму неприводимых (использовать только весовое разложение).

3) Доказать, что любой старший вес в модуле $V(\lambda)\otimes V(\mu)$ имеет вид $\lambda+\mu-\sum k_i\alpha_i$, где α_i - простые корни, $k_i \in \mathbb{Z}_+$.

4) Может ли оказаться, что для любого простого корня α_i старший вес $\lambda+\mu-\alpha_i$ не входит в $V(\lambda)\otimes V(\mu)$, а для некоторой комбинации $\sum k_i\alpha_i$ старший вес $\lambda+\mu-\sum k_i\alpha_i$ в данный модуль входит?

5) Пусть $U \subseteq V(\lambda)\otimes V(\mu)$ – некоторый $\mathfrak{g}$-подмодуль, и $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Доказать, что в U есть ненулевой вектор, аннулируемый $\mathfrak{h}$, тогда и только тогда, когда такой вектор есть в $V(\lambda)\otimes V(\mu)$.

6) Содержит ли $\mathfrak{s}l(5)$-модуль $V(18\pi_1+\pi_3)$ (здесь π_i – фундаментальные веса) ненулевой вектор, аннулируемый подалгеброй Картана?

7) Пусть α, β – корни и $\alpha+\beta$ также является корнем. Доказать, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$.

8) Пусть C – алгебра Клиффорда и $Z(C)$ – ее центр. Проверить, что $Z(C)\cap C^+ = \mathbb{C}$.

9) Доказать, что $Lie(SpinQ) = \mathfrak{so}(Q) \subset C(Q)$ – вложение из занятия 5.

10) Описать центр группы $SpinQ$.

11) Доказать, что для простой алгебры Ли отвечающая ей положительная камера Вейля содержится во внутренности конуса, порожденного простыми корнями.

12) Доказать, что $SL_n : S^k(\mathbb{C}^n)$ и $SL_n : S^k(\mathbb{C}^n)^*$ – неприводимые представления со старшими весами $k\pi_1$ и $k\pi_{n-1}$ соответственно.

13) Доказать, что для любых доминантных весов λ и μ найдутся натуральные числа N и n, такие что $V(N\lambda)$ содержит старший вектор веса $n\mu$. Можно ли считать, что $n = 1$?