Листок 1

Пусть $w = f(z)$ $(z = x + \sqrt{-1}y,\ w = u + \sqrt{-1}v)$ - гладкое отображение одной области в $\mathbb{C}$ на другую. Введем обозначение $f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \sqrt{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $f_{\bar z} = \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Покажите, что:

1. $dw = f_z dz + f_{\bar z} d\bar z$
2. Якобиан $J(f) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2$
3. df переводит круги с центром в начале координат в подобные эллипсы, у которых отношение большой оси к малой равно $\frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}$, а направление большой оси равно $\frac{1}{2}arg\frac{f_{\bar z}}{f_z}$.
4. Пусть $z(t) = x(t) + \sqrt{-1}y(t)$. Показать, что кривизна $k(t)$ кривой $z(t)$ равна $k(t) = \frac{1}{|\dot z|}Im\frac{\ddot z}{\dot z}$ (обычно кривизна вычисляется по формуле $\frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{(\dot x^2+\dot y^2)^{3/2}}$).
5. Рассмотрим уникальный дифференциальный оператор Шварца (Шварциан) $F(t) \to \left(\frac{F''}{F'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 = S_F(t)$.
Проверьте, что $S_F(t) = 0$ для дробно-линейного преобразования $F(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ (где $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0$).
6. Докажите, что $\dot k(t) = \frac{1}{|\dot z|}ImS_z(t)$.
7. Докажите, что дробно-линейное преобразование $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ переводит прямые и окружности в прямые и окружности.
8. Функция $w = f(z)$ называется голоморфной, если она дифференцируема по z. Докажите, что это эквивалентно любому из следующих условий
а) $f_{\bar z} = 0$
б) форма $f(z)\,dz$ замкнута.
в) df - преобразование подобия.
9. Вычислите кривизну образа окружности $z(t) = e^{it}$ при голоморфном отображении $w = f(z)$.
10. Найдите $\int\limits_\gamma f dz$, если $f(z) = (z-a)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$, а γ - окружность радиуса r с центром в точке a.
11. Докажите, что $\left|\int\limits_\gamma f dz\right| \leq \int\limits_\gamma |f|\,|dz|$.