Комплексный анализ, весна 2004, листок 2

1. Пусть функция f голоморфна в окрестности круга радиуса r с центром в точке $z \in \mathbb{C}$. Покажите, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta$$

(«значение голоморфной функции в центре круга равно среднему ее значений на окружности»).

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с (кусочно-гладкой, скажем) границей γ и $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Интегралом типа Коши называется функция $F\colon \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$, определенная по формуле

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Нетрудно показать, что эта функция голоморфна.

2. [Задача некорректна, из листка исключена.]

3. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, $\gamma = \partial D$, $f(z) = z^n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Вычислите функцию $F(\cdot)$.

4. Функция двух переменных u (класса C^2) со значениями в $\mathbb{R}$ называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Покажите, что функция является гармонической тогда и только тогда, когда локально она является вещественной частью голоморфной функции, и выясните, можно ли в этом утверждении опустить слово «локально».

5. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leqslant |z| \leqslant R\}$. Постройте функцию, непрерывную на D и гармоническую в $\operatorname{int} D$, которая тождественно равна нулю на внутренней границе кольца D и тождественно равна единице на его внешней границе.

6. Сформулируйте и докажите для гармонических функций утверждение, аналогичное утверждению задачи 1.

7. Пусть u — непостоянная гармоническая функция на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Покажите, что нигде в U у нее не может быть локального экстремума.

8. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с (кусочно-гладкой, скажем) границей γ и $f\colon \gamma \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Покажите, что существует не более одного продолжения f до функции, непрерывной на D и гармонической в $\operatorname{int} D$.

9*. Покажите, что продолжение, о котором речь идет в задаче 8, всегда существует. (Если трудно, попробуйте сделать это для случая, когда D — круг. В этом случае для продолжения есть даже явная формула, но при доказательстве существования можно без нее обойтись.)

10*. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — круг и $f\colon \partial D \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы она продолжалась до функции, непрерывной на D и голоморфной в $\operatorname{int} D$. (Если трудно доказать достаточность, постарайтесь найти достаточно сильное необходимое условие.)