26.02.04

Листок №3 по ТФКП

Обозначения: $\Delta(z_0, R)$ - открытый диск в $\mathbb{C}$, с центром в точке 0 и радиусом R,
$A(r, R)$ - кольцо $r < |z| < R$.

1. Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутом диске $\overline{\Delta}$ и голоморфна в Δ, то $f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(t)}{t-z} dt$ для любого $z \in \Delta$.

2. Пусть $f(z)$ непрерывна в области Ω. Если дифференциальная форма $f(z)\,dz$ замкнута, то функция $f(z)$ голоморфна в Ω.

3. Если функция $f(z)$ непрерывна в Ω и голоморфна в Ω всюду, за исключением, быть может, точек, лежащих на прямой (или дуге окружности), то $f(z) \in H(\Omega)$.

4. Пусть $f \in H(\Omega)$. Если $A\,Re\,f(z) + B\,Im\,f(z) = C$ в Ω , где A, B, C - действительные числа, не все равные 0, то $f(z)$ постоянна в D.

5. Пусть $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами, и пусть γ_R - образ окружности $|z| = R$ при отображении $z \to P_n(z)$. Доказать, что если R достаточно велико, то путь γ_R не проходит через 0 и $Ind(0, \gamma_R) = n$. Вывести из всего этого основную теорему алгебры.

6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

7. Пусть $f \in H(A(r, R))$. Если γ - замкнутый путь, содержащийся в $A(r, R)$, то

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = Ind(\gamma, 0) \cdot a_{-1},$$

где a_{-1} коэффициент при z^{-1} в ряде Лорана функции f. Доказать.

8. Доказать теорему о вычетах: пусть Ω область на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, а f - функция, голоморфная в Ω, за исключением, быть может, дискретного множества точек $Sing$. Если K - компактная область, содержащаяся в Ω, граница которой $\partial\overline{K}$ не проходит ни через одну из точек $Sing$, то

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{\partial\overline{K}} f(z)\,dz = \sum_{\omega \in Sign \cap K} Res(f, \omega),$$

где $Res(f, \omega)$ - вычет функции f в точке ω.

9. Пусть $f \in H(\Omega)$, $\overline{\Delta}(z_0, R) \subseteq \Omega$, $0 \leq r < R$.
Вычислите $\int\limits_{r<|z-z_0|<R} f(z)\,dxdy$.

10. Пусть $p > 0$, $f \in H(\mathbb{C})$ - целая функция и $|f(z)| \leq M(1 + |z|)^p$ для некоторой константы $M > 0$ и любого $z \in \mathbb{C}$. Доказать, что f - многочлен степени $\leq p$.

11. $f \in H(\Omega)$, $\overline{\Delta}(0, 1) \subset \Omega$. Вычислить $\int\limits_{\partial\Delta} \frac{\overline{f(t)}}{t-z} dt$.

12. Доказать, что функция, мероморфная на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, рациональна.

13. Если 0 изолированная существенно особая точка функции $f(z)$, голоморфной в проколотом диске $\overset{0}{\Delta}(0, 1)$, то для любого r, $0 < r < 1$, множество $f\left(\overset{0}{\Delta}(0, r)\right)$ всюду плотно в $\mathbb{C}$. Доказать.