Комплексный анализ, весна 2004, листок 4

1. Пусть f — голоморфная и взаимно однозначная функция на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$. Покажите, что обратная функция $f^{-1}\colon f(U) \to U$ тоже голоморфна.

2. Пусть функция f непрерывна в диске $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Покажите, что

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

3. Пусть f — целая функция, не являющаяся постоянной. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что $\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.

4. Пусть f — целая функция, не являющаяся многочленом. Докажите, что (в обозначениях предыдущей задачи)

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = +\infty.$$

5. Пусть функция f голоморфна в кольце $\{z \mid a < |z| < b\}$, и пусть $M(r)$ означает то же, что и выше. Докажите, что функция $r \mapsto M(r)$ имеет на интервале $(a; b)$ не более одного локального минимума.

6*. В условиях предыдущей задачи покажите, что функция, переводящая $\ln r$ в $\ln M(r)$, выпукла вниз.

7. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D, голоморфна в $\operatorname{int} D$, и $|f(z)| = 1$ для всех $z \in \partial D$. Докажите, что функция f имеет нуль в $\operatorname{int} D$.

8*. Пусть функции f, g и h голоморфны и непостоянны на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Докажите, что функция

$$z \mapsto |f(z)| + |g(z)| + |h(z)|$$

не может иметь в U локального максимума.

9. Докажите, что не существует функции f, голоморфной в единичном круге $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ и обладающей следующими свойствами: $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \Delta$, $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$.

10*. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D и голоморфна в $\operatorname{int} D$. Предположим, что f обращается в нуль в точках $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{int} D$ (не обязательно только в них). Докажите, что

$$|f(0)| \leqslant \max_{z\in D} |f(z)| \cdot \prod_{j=1}^{n} |a_j|.$$

11. Пусть функция f голоморфна, непостоянна и ограничена в круге $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$. Может ли она обращаться нуль во всех точках вида $n/(n+1)$, где n — целое положительное число?

12*. А если в предыдущей задаче заменить $n/(n+1)$ на $n^2/(n^2+1)$? А если дополнительно потребовать, чтоб нули были *только* в этих точках?