11 марта 2004 года

Листок 5

• Ω - область в $\mathbb{C}$. В пространстве $C(\Omega)$ непрерывных функций в области Ω рассматривается топология поточечной сходимости, равномерной на компактах (обозначение $f_n \rightrightarrows f$).

• Семейство $\mathcal{F}$ называется нормальным в Ω, если из любой последовательности $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к функции f ($f_{n_k} \rightrightarrows f$) или к бесконечности $f_{n_k} \rightrightarrows \infty$.

Задача 1. Если $f_n \rightrightarrows f$ и $f_n \in H(\Omega)$, то предельная функция $f \in H(\Omega)$. Доказать.

Задача 2. Доказать, что семейство $\mathcal{F}$ тогда и только тогда нормально в Ω, когда оно нормально в любом замкнутом диске $\overline{\Delta} \subset \Omega$.

Задача 3. Печальный пример последовательности функции $\left\{\frac{z}{n}\right\}$ в любой области Ω, не содержащей нуля, привели Гурвица к открытию следующего важного факта: пусть $f_n \in H(\Delta)$ последовательность голоморфных в диске Δ функций, $f_n \rightrightarrows f$ и каждая функция f_n нигде в Δ не обращается в нуль. Тогда либо $f \equiv 0$, либо f нигде в Δ не обращается в нуль.
Попробуйте доказать эту теорему. Возможно Вам пригодится результат задачи 10.

Задача 4. Пусть семейство $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ нормально. Верно ли, что нормально семейство $\mathcal{F}'$, состоящее из первых производных функций, входящих в $\mathcal{F}$?

Задача 5. Пусть $\mathcal{F}'$ нормально. Верно ли, что $\mathcal{F}$ нормально?

Задача 6*. Доказать нормальность семейства $\mathcal{F}$, состоящего из всех голоморфных функций, отображающих единичный диск $\Delta(0;1)$ в $\widehat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$.

Задача 7. Пусть $\{f_n\} \subset H(\Delta(0;1))$, $f_n(0) = 0$ и $Re f_n \rightrightarrows 0$.
Доказать, что $f_n \rightrightarrows 0$ в $H(\Delta(0;1))$.

Задача 8. Пусть Ω - компактная область в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{F} = \{f \in H(\Omega) : f(\Omega) \subseteq \Omega\}$. Доказать, что семейство $\mathcal{F}$ нормально и найти его замыкание $\overline{\mathcal{F}}$.

Задача 9*. Доказать малую теорему Пикара: непостоянная функция $F \in H(\mathbb{C})$ принимает все значения, за исключением, быть может, одного.

Задача 10. (Принцип Аргумента). Пусть f мероморфная в области Ω функция, γ - простой замкнутый контур, гомологичный нулю в Ω и не содержащий множества нулей и полюсов функции f. Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = n_Z - n_P = \frac{1}{2\pi} \Delta arg f$, где n_Z - число нулей f внутри контура γ (с учетом кратности), n_P - число полюсов, а $\Delta arg f$ - изменение ветви аргумента при обходе контура γ.

Задача 11. (Дама с собачкой). Все, как в задаче 10, но только мероморфных функций две: f и g, причем $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ на контуре γ.
Тогда $n_{Z(f)} - n_{P(f)} = n_{Z(g)} - n_{P(g)}$.

Задача 12*. Доказать, что вблизи существенной особенности мероморфная функция принимает все значения на $\widehat{\mathbb{C}}$, за исключением, быть может, двух (Указание: рассмотреть семейство $f_n = f(z/n)$).