Комплексный анализ, весна 2004, листок 6

Под единичным кругом в этом листке понимается открытый круг радиуса 1 с центром в нуле, а под конформным отображением — голоморфный изоморфизм.

1. Постройте конформное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость.

2. Постройте конформное отображение полукруга (части единичного круга, лежащей в верхней полуплоскости) на верхнюю полуплоскость. [Указание: в какой-то момент придется возводить в квадрат.]

3. Постройте конформное отображение единичного круга, из которого удален интервал $[0;1)$ («круга с разрезом от нуля до единицы», как сказали бы классики), на верхнюю полуплоскость

Следующий простой факт очень помогает в проверке того, что данное голоморфное отображение является изоморфизмом.

4. Пусть U — область на сфере Римана $\widehat{\mathbb{C}}$, ограниченная (кусочно-гладкой, скажем) кривой Γ; предположим также, что Γ гомеоморфна окружности. Пусть $f\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ — голоморфное отображение, непрерывно продолжающееся на $\bar{U}$ и обладающее тем свойством, что ограничение продолженного отображения f на Γ взаимно однозначно отображает Γ на кривую Γ', а $\overline{f(U)} \neq \widehat{\mathbb{C}}$. Докажите, что f является изоморфизмом U на одну из двух компонент дополнения $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma'$.

5. Докажите, что отображение $z \mapsto (1/2)(z+1/z)$ задает конформное отображение внешности единичного круга, и найдите образ этого конформного отображения.

6. Постройте конформное отображение внешности круга на внешность эллипса. (Кстати, конформное отображение внутренности круга на внутренность эллипса через элементарные функции не выражается.)

7. Покажите, что отображение $z \mapsto \cos z$ задает конформное отображение области, заданной неравенствами $0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0$, и найдите образ этого конформного отображения.

8. Тот же вопрос, что в задаче 7, но область задана неравенствами $0 < \operatorname{Re} z < \pi$.

9. Существует ли такое конформное отображение внутренности равнобедренного прямоугольного треугольника на внутренность равностороннего треугольника, что при соответствии границ вершины переходят в вершины?

10. («Принцип симметрии».) Пусть $U, U' \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — области, ограниченные простыми замкнутыми (кусочно-гладкими, для определенности) кривыми Γ и Γ' соответственно и $f\colon U \to U'$ — конформное отображение; согласно принципу соответствия границ, оно продолжается до гомеоморфизма $\overline{U} \to \overline{U'}$. Предположим, что Γ содержит прямолинейный отрезок ℓ, переходящий при указанном гомеоморфизме в прямолинейный же отрезок $\ell' \subset \Gamma'$. Докажите, что f продолжается (единственным образом) до конформного отображения

$$U \cup \operatorname{int}(\ell) \cup S_\ell(U) \to U' \cup \operatorname{int}(\ell') \cup S_{\ell'}(U')$$

(S означает симметрию относительно прямой). (Формулировка этого утверждения содержит небрежность — внесите необходимые уточнения!)

Обобщите также это утверждение на случай, когда ℓ и ℓ' могут быть не только отрезками, но и дугами окружностей.

11. Существует ли такое конформное отображение внутренности квадрата на внутренность прямоугольника, не являющегося квадратом, что при соответствии границ вершины переходят в вершины?