25 марта 2004 года

Листок №7

Неконструктивное доказательство теоремы Римана в задачах

Обозначения и соглашения:

- Δ – единичный диск с центром в нуле;
- Все области ограничены (для простоты);
- Все функции голоморфны;
- Унивалентность=инъективность;
- $(f_j) \rightrightarrows g$ – равномерная сходимость на компактах.

Теорема (Риман). Пусть область $U \subset \mathbb{C}$ ($U \neq \mathbb{C}$) гомеоморфна Δ.
Тогда U биголоморфно эквивалента Δ.

Задача 1. (Шаг 1). Пусть $p \in U$ и $F = \{\delta : U \to \Delta | \, \delta$ унивалентна, $\delta(p) = 0\}$. Докажите, что F непусто.

Задача 2. (Шаг 2). Докажите, что F – нормальное семейство.

Задача 3. (Шаг 3). Пусть $M = sup\{|\delta'(p)|, \delta \in F\}$. Докажите, что M конечно.

Задача 4. (Шаг 4). Существует такая функция $\delta_0 \in F$, что $|\delta'(p)| = M$.

Задача 5. (помощь). Пусть $f_j \rightrightarrows f$ в области U, причем f_j не равны нулю. Тогда либо $f_j \rightrightarrows 0$, либо f не равна нулю в U.

Задача 6. (Шаг 5). δ_0 – искомая функция.

Указание: если δ_0 выпускает $\beta \in \Delta$, то, подправив с помощью $t_\beta = \frac{z-\beta}{1-\overline{\beta}z}$, можно считать, что δ_0 отлична от нуля в U. Тогда рассмотрим корректно определенную в U функцию $\mu = \sqrt{\delta_0}$. Функция $t_{\mu(p)} \circ \mu \in F$.
С другой стороны, модуль её производной в точке p больше, чем M. Противоречие.

Задача 7. Пусть $f(z)$ – целая функция. Известно, что семейство $\{f(\lambda z), \lambda \in \mathbb{C}\}$ нормально в кольце $r_1 < |z| < r_2$. Докажите, что $f(z)$ – многочлен.

Задача 8. Пусть $f(z)$ – целая функция, вещественная на вещественной оси и чисто мнимая на мнимой оси. Докажите, что функция f нечетна.

Задача 9. Функция $f(z)$ голоморфна в Δ, непрерывна в $\overline{\Delta}$ и $|f| = 1$ на границе $\partial\Delta$. Докажите, что функция $f(z)$ рациональна.