НМУ, 2 курс

Экзамен по комплексному анализу (16 мая 2004)

Время на выполнение работы — 4 часа

Для получения оценки «отлично»
не обязательно решить все задачи

1. Опишите все целые функции f, для которых отношение $|f(z)|/e^{\mathrm{Re}(z)}$ ограничено на всем $\mathbb{C}$.

2. Для всякой ли функции f, голоморфной в кольце

$$A = \{z \mid 1 < |z| < 2\},$$

существует последовательность многочленов $\{f_n\}$, сходящаяся к f равномерно на каждом компактном множестве, содержащемся в A?

3. Функция f голоморфна в единичном круге $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$, причем $\mathrm{Re}(f(z)) \leqslant 1$ для всех $z \in \Delta$ и $f(0) = 0$. Докажите, что

$$|f(z)| \leqslant \frac{2|z|}{1 - |z|}$$

для всех $z \in \Delta$.

4. Пусть f — многочлен степени n, и пусть a — положительное число. Каково может быть максимальное число компонент связности у множества $\{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < a\}$?

5. Пусть $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Многочлен с комплексными коэффициентами f обладает тем свойством, что $f(H) \subset H$ и $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Докажите, что $\deg f = 1$.

6. Найдите длину окружности единичного радиуса с центром в нуле в гиперболической метрике на множестве $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{r} < |z| < r\}$, где $r > 1$.

7. Функция f непрерывна в диске $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Докажите, что для всякой точки $a \in \operatorname{int} D$ найдутся две точки $z_1, z_2 \in \partial D$, для которых

$$f'(a) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}.$$