НМУ, 2 курс

Домашний экзамен по комплексному анализу

(4-11 октября 2004)

Для получения оценки «отлично»

не обязательно решить все задачи

Работа должна иметь титульный лист, на котором написана

ФАМИЛИЯ, ИМЯ И ОТЧЕСТВО сдающего экзамен

И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО

Работы сдавать в учебную часть до вечера 11 октября

включительно

1. Доказать, что уравнение $z^3 + z + 1 = e^z$ имеет бесконечно много решений.

2. Найти все мероморфные в $\mathbb{C}$ функции f, удовлетворяющие условию $\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 |dz|^2 < \infty$.

3. Пусть функция f голоморфна в открытом диске Δ. Предположим, что найдется такая открытая дуга $I \subset \partial\Delta$, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$ для любой последовательности точек $\{z_n\}$ из диска, сходящейся к точке $z_0 \in I$. Доказать, что $f \equiv 0$.

4*. Пусть f — целая функция, вещественная на вещественной оси и отображающая верхнюю полуплоскость в себя. Доказать, что $f(z) = az + b$, где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и $f\colon \Delta \to \Delta$ — непостоянная голоморфная функция. Предположим, что $f(f(z)) = f(z)$ всюду на Δ. Доказать, что $f(z) = z$ всюду на Δ.

6. Пусть Δ означает то же, что в предыдущей задаче, и пусть $f\colon \Delta \to \Delta$ — голоморфная функция, для которой $\overline{f(\Delta)} \subset \Delta$. Доказать, что существует и единственна точка $z_0 \in \Delta$, для которой $f(z_0) = z_0$.