Лекция 1

1. Некоторые теоремы об индексе

1.   . На 11-й лекции в прошлом семестре была сформулирована следующая теорема.

1. *Пусть H_j – гильбертовы пространства ($j = 1, 2, 3$), и пусть $A_1 : H_1 \to H_2$ и $A_2 : H_2 \to H_3$ – фредгольмовы операторы. Тогда $A_2A_1 : H_1 \to H_3$ – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(A_2A_1) = \varkappa(A_2) + \varkappa(A_1). \tag{1}$$

Такая же теорема верна для операторов в банаховых пространствах, но мы ограничимся случаем операторов в гильбертовых пространствах.

. Операторы A_1 и A_2 имеют (двусторонние) параметриксы B_1 и B_2 (см. лекцию 10 в прошлом семестре). Элементарно проверяется, что B_1B_2 – параметрикс для A_2A_1 (проделайте это самостоятельно). Отсюда следует, что A_2A_1 – фредгольмов оператор. Теперь будем доказывать формулу (1). Идея доказательства состоит в его сведе́нии к случаю, когда все три пространства конечномерны.

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\operatorname{Ker} A_1 = \{0\}$. Действительно, так как $\operatorname{Ker} A_2A_1 \supset \operatorname{Ker} A_1$, то если заменить H_1 на $H_1 \ominus \operatorname{Ker} A_1$, левая и правая части в формуле (1) уменьшатся на $\dim \operatorname{Ker} A_1$. Итак, пусть у A_1 нет нетривиального ядра, так что этот оператор изоморфно отображает H_1 на (замкнутое) подпространство $\operatorname{Im} A_1$ в H_2.

Разложим пространство H_2 в прямую сумму четырех подпространств:

$$H_2 = L \dotplus L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3, \tag{2}$$

где пространства L_j конечномерны. Эти четыре пространства определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_1 &= \operatorname{Ker} A_2 \cap \operatorname{Im} A_1, \\ L &= \operatorname{Im} A_1 \ominus L_1, \\ L_2 &= \operatorname{Ker} A_2 \ominus L_1, \\ L_3 &= (\operatorname{Im} A_1 \dotplus L_2)^{\perp}. \end{aligned}$$

Приведем пояснения. Очевидно, что сумма $L \dotplus L_1$ прямая (даже ортогональная) и что это $\operatorname{Im} A_1$. Далее, из определений L_1 и L_2 видно, что L_2 не содержит ненулевых элементов из $\operatorname{Im} A_1$, поэтому сумма $\operatorname{Im} A_1 \dotplus L_2$ тоже прямая. Прибавляя к ней ее ортогональное дополнение L_3, получаем (2). Конечномерность подпространств L_j следует из конечномерности ядер и коядер фредгольмовых операторов A_1 и A_2.

Теперь H_1 и H_2 можем записать в виде

$$H_1 = A_1^{-1}L \dotplus A_1^{-1}L_1, \tag{3}$$

$$H_3 = A_2L \dotplus A_2L_3 \dotplus (\operatorname{Im} A_2)^{\perp}. \tag{4}$$

Поясним формулу (3): в L_2 и L_3 нет элементов из $\operatorname{Im} A_1$, а прообразы подпространств L и L_1 оператор A_1 отображает на эти подпространства взаимно однозначно. Далее, поясним формулу (4): оператор A_2 аннулирует L_1 и L_2 и взаимно однозначно отображает подпространства L и L_3 на их образы.

Теперь мы мы можем "отщепить" изоморфизмы

$$A^{-1}L \to L \to A_2 L,$$

определяемые сужениями операторов A_1 и A_2 соответственно на $A^{-1}L$ и L. Эти сужения и их произведение имеют нулевые индексы. Остаются конечномерные пространства

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1^{-1} L_1, \\ E_2 &= L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3, \\ E_3 &= A_2 L_3 \dotplus (\operatorname{Im} A_2)^{\perp}. \end{aligned}$$

Здесь сужение оператора A_1 взаимно однозначно отображает E_1 на L_1, а сужение оператора A_2 на E_2 взаимно однозначно отображает L_3 на E_3 и аннулирует L_1 и L_2. Мы свели доказательство формулы (1) к случаю, когда все три пространства конечномерны.

Теперь заметим, что если h_1 и h_2 – конечномерные пространства и $\alpha : h_1 \to h_2$ – линейный оператор, то

$$\varkappa(\alpha) = \dim h_1 - \dim h_2. \tag{5}$$

Это следует из того, что дополнение к ядру и образ оператора α имеют одинаковые размерности. Используя формулу (5) и считая пространства H_j конечномерными, без труда получаем формулу (1). $\square$

2. . Проблема вычисления индекса общего эллиптического оператора поставлена И.М. Гельфандом в 1960 г. Тогда понятия ПДО еще не было, и он имел в виду эллиптические операторы в частных производных на замкнутом многообразии (и дифференциальные эллиптические задачи на компактном многообразии с краем). Задача вызвала большой интерес у математиков, ее окончательное решение для эллиптических ПДО нашли Атья и Зингер в 1962 г. Индекс был вычислен в топологических терминах через главный символ. Мы сейчас обсудим некоторые элементарные соображения, использованные при решении этой задачи. Начнем с редукции к случаю ПДО нулевого порядка.

Пусть A – эллиптический ПДО порядка m на замкнутом многообразии M. Это фредгольмов оператор из $H^m(M)$ в $H^0(M)$ (или из $H^{m+t}(M)$ в $H^t(M)$, но индекс не зависит от t: см. лекцию 11 в предыдущем семестре). Желая вычислить индекс $\varkappa(A)$, мы можем, не ограничивая общности, предположить, что $m = 0$. Действительно, существует эллиптический ПДО Λ_{-m} порядка $-m$, изоморфно отображающий $H^0(M)$ на $H^m(M)$. Индекс такого ПДО равен, конечно, нулю, и в силу тривиального следствия только что доказанной теоремы

$$\varkappa(A) = \varkappa(A\Lambda_{-m}).$$

Впрочем, это следствие, состоящее в том, что *при умножении фредгольмова оператора на обратимый оператор индекс не меняется*, легко проверяется непосредственно (проверьте сами). Полученный ПДО имеет нулевой порядок.

Далее, на гладком многообразии M всегда можно ввести гладкую риманову метрику – скалярное произведение в касательном пространстве T_xM, позволяющее измерять длины не только в T_xM, но и на M. Скалярное произведение в T_xM определяется положительно определенной матрицей – ковариантным тензором порядка 2. Возьмем обратную матрицу, это контравариантный тензор порядка 2. Он определяет скалярное произведение в кокасательном пространстве T^*M. Итак, в T^*M определена длина ковектора. Ковекторы длины 1 образуют сферу S^*_xM, а все вместе эти сферы образуют расслоение S^*M единичных сфер.

Мы утверждаем, что при переходе к ПДО порядка 0 мы можем сохранить неизменным главный символ на S^*M. Действительно, при построении ПДО Λ_{-m} мы можем заранее задать его главный символ $\sigma_0(x,\xi)$ (однородный порядка $-m$ по ξ), и можно предположить, что он равен 1 на S^*M. Произведению двух ПДО отвечает произведение их главных символов, так что главные символы исходного и полученного ПДО совпадают на S^*M.

Главный символ полученного ПДО однороден степени 0 по ξ. Он полностью определяется своими значениями на S^*M, и мы теперь будем рассматривать его как функцию на S^*M. Это гладкая (класса C^∞) функция на S^*M, если рассматриваются скалярные операторы, всюду отличная от нуля. В случае матричного ПДО это гладкая матрица, всюду невырожденная.

Рассмотрим теперь гомотопию A_t $(0 \le t \le 1)$ в классе эллиптических ПДО нулевого порядка заданной размерности, например, скалярных. Этот ПДО зависит от t непрерывно в смысле операторной нормы в $H^0(M)$. На лекции 11 в прошлом семестре мы проверили, что все операторы, достаточно близкие к данному фредгольмову оператору A по норме, (фредгольмовы и) имеют тот же индекс. Более точно, верно следующее утверждение, которое сейчас удобно подготовить в виде леммы:

1. *Если B – параметрикс для A и $\|\Delta A\| < \|B\|^{-1}$, то оператор $A + \Delta A$ фредгольмов и*

$$\varkappa(A+\Delta A) = \varkappa(A).$$

Поэтому *все операторы A_t имеют один и тот же индекс.*

Обозначим через $\sigma_t(x,\xi)$ главный символ ПДО A_t. Гомотопии ПДО A_t отвечает гомотопия σ_t $(0 \le t \le 1)$ их главных символов. Это гомотопия по гладким эллиптическим символам.

Пусть теперь даны два эллиптических главных символа σ_0 и σ_1, связанные *непрерывной* гомотопией σ_t $(0 \le t \le 1)$. Здесь $\sigma_t(x,\xi)$ – это всюду отличная от нуля функция (или невырожденная матрица заданного порядка) на S^*M, непрерывно зависящая от (t,x,ξ). Будет доказана следующая теорема:

2. *Индексы ПДО A_0 и A_1 совпадают.*

. Непрерывные функции $\sigma_t(x,\xi)$ можно равномерно аппроксимировать гладкими по (x,ξ), поэтому, не ограничивая общности, можно предположить функции $\sigma_t(x,\xi)$ гладкими по (x,ξ). Гладкому главному символу σ_t можно сопоставить эллиптический ПДО.

ПДО на M имеют вид

$$A = \sum_{j}^{N} \varphi_j A_j \psi_j \cdot, \qquad (6)$$

где j-е слагаемое отвечает j-й координатной окрестности, $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ – гладкие функции с носителями в этой окрестности и A_j – ПДО в $\mathbb{R}^n$ в соответствующих локальных координатах. В частности,

$$A_t = \sum_{1}^{N} \varphi_j(x) A_{j,t} \psi_j(x),$$

где $A_{j,t}$ – семейство эллиптических ПДО в $\mathbb{R}^n$ с непрерывными по t символами. Их младшие члены не влияют на индекс оператора A, и мы хотим воспользоваться этим и показать, что для t в достаточно малой окрестности фиксированной точки t_0 имеет место равенство

$$\varkappa(A_t) = \varkappa(A_{t_0}).$$

На лекции 7 в прошлом семестре для ПДО A порядка 0 в $\mathbb{R}^n$ была установлена оценка

$$||Au||_0 \le (M_A + \varepsilon)||u||_0 + C_\varepsilon ||u||_{-1},$$

где M_A – верхняя грань модуля главного символа и ε – произвольно малое положительное число. Затем там же было показано, что если верна оценка

$$||Au||_0 \le C_1||u||_0 + C_2||u||_{-1},$$

то найдется оператор T порядка $-\infty$, для которого

$$||(A-T)u||_0 \le (C_1 + \varepsilon)||u||_0.$$

Из этих двух утверждений следует, утверждение, которое тоже назовем леммой:

2. *Для ПДО A порядка 0 в $\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой оператор $T = T_\varepsilon$ порядка $-\infty$, что*

$$||(A-T)u||_0 \le (M_A + \varepsilon)||u||_0. \qquad (7)$$

Переходя к ПДО A уже на M по формуле (6), мы в качестве *следствия* получаем аналогичный результат, по крайней мере, с фиксированным добавочным коэффициентом C справа: существует такой оператор $T - T_\varepsilon$ на M порядка $-\infty$, что

$$||(A-T)u||_0 \le C(M_A + \varepsilon)||u||_0. \qquad (8)$$

(Может быть, этот коэффициент и не нужен.) Пусть t_0 – фиксированная точка на $[0,1]$, B – параметрикс для A_{t_0} и $\delta > 0$ настолько мало, что при $|t - t_0| < \delta$

$$\max |\sigma_t(x,\xi) - \sigma_{t_0}(x,\xi)| < \frac{1}{3C||B||}.$$

Фиксируя t из δ-окрестности точки t_0 и пользуясь следствием из леммы 2, найдем такой оператор T порядка $-\infty$, что

$$\|A_t - A_{t_0} - T\| < \frac{2}{3\|B\|}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\varkappa(A_t) = \varkappa(A_t - T) = \varkappa(A_{t_0}),$$

что и требовалось. □

Мы теперь можем рассмотреть *гомотопические классы* непрерывных отображений расслоения S^*M в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ или в пространство невырожденных комплексных матриц заданного порядка. Каждый такой класс содержит символы эллиптических ПДО нулевого порядка (так как непрерывный невырожденный символ можно аппроксимировать гладким), и *индексы всех эллиптических ПДО в одном классе совпадают.*

Это утверждение легко распространяется на эллиптические ПДО заданного ненулевого порядка.

Что индексы двух эллиптических дифференциальных операторов совпадают, если их можно связать гомотопией в пределах класса дифференциальных эллиптических операторов, было ясно с самого начала исследования проблемы индекса. Но изучать гомотопии в пределах класса эллиптических дифференциальных операторов очень сложно. Другое дело – в классе непрерывных ненулевых функций или невырожденных матриц на S^*M. Именно это и стимулировало построение теории ПДО в начале 60-х гг. А затем быстро выяснилось, что они присутствуют всюду в анализе и классической математической физике. Например, если Γ – (гладкая) граница некоторой ограниченной области в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathcal{A}$ – потенциал простого слоя на этой поверхности для уравнения Лапласа или для сильно эллиптической системы 2-го порядка, то его сужение на Γ – эллиптический ПДО (порядка -1). Интегральные операторы, являющиеся эллиптическими ПДО, мы специально рассмотрим в нашем курсе.

Индекс эллиптического ПДО в данном классе равен нулю, если этот класс содержит обратимый ПДО или хотя бы самосопряженный эллиптический ПДО, так как у таких ПДО индекс равен нулю.

Не затрагивая общую формулу Атьи–Зингера, мы можем указать простые условия, достаточные для равенства индекса нулю. Это следствия из формулы Атьи–Зингера, но они могут быть доказаны проще из элементарных гомотопических соображений. Вот они.

1. *Пусть M – замкнутая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда матричные эллиптические ПДО на M с размерами матрицы $N \times N$ имеют нулевой индекс, если $N < n$.*

В частности, так обстоит дело со скалярными эллиптическими ПДО, если $\dim M$ не меньше 2. При $n = 1$, т.е. когда M – гладкая замкнутая кривая, это уже не так, и мы по-видимому сумеем в нашем курсе обсудить вычисление индекса эллитического ПДО на кривой.

2. *Для равенства индекса нулю достаточно также, чтобы главный символ обладал свойством*

$$\sigma(x, -\xi) = \sigma(x)\sigma(x, \xi),$$

где $\sigma(x)$ – ненулевая функция (или невырожденная матрица), не зависящая от ξ.

Отметим, что говорить о спектральных свойствах эллиптического ПДО положительного порядка с ненулевым индексом нет смысла, так как его спектр заполняет всю комплексную плоскость.

На следующей лекции мы начнем изучение обширного класса ПДО, *эллиптических с параметром.* Параметр изменяется в замкнутом угле (секторе) Λ на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. При большом по модулю $\lambda \in \Lambda$ доказывается обратимость оператора.