Лекция 10

Вспомним формулировку последнего предложения.

4. *Пусть $c(x,\xi,\lambda)$ – функция на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times L_\rho$, непрерывная с производными любого порядка по x и не зависящая от x при $|x|\geq r$, и пусть*

$$|\partial_x^\alpha c(x,\xi,\lambda)|\leq C_\alpha\frac{(1+|\xi|)^p}{1+|\xi|^m+\lambda} \tag{23}$$

при некоторых $m>0$, $p\in\mathbb{R}$ и любом α, где C_α не зависят от (x,ξ,λ). Тогда для оператора

$$C(\lambda)f(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}c(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi \tag{24}$$

при любом s справедлива оценка

$$||C(\lambda)f||_{s+m-p}+|\lambda|\cdot||C(\lambda)f||_{s-p}\leq C_s||f||_s. \tag{25}$$

Здесь и дальше в этом пункте нормы берутся по $\mathbb{R}^n$.

. Оно проводится в духе нашего доказательства теоремы об ограниченности ПДО без параметра в соболевских нормах (предыдущий семестр). Полагаем

$$v(x,\lambda)=C(\lambda)f(x).$$

Рассматриваем два случая. 1) Символ c не зависит от x. Это легкий случай, надо перейти к преобразованиям Фурье. 2) Символ c равен 0 при больших $|x|$. Тогда тоже делается преобразование Фурье и надо рассматривать оператор

$$(Fv)(\eta,\lambda)=(2\pi)^{-n}\int d(\eta-\xi,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi,$$

где

$$d(\eta,\xi,\lambda)=\int e^{-ix\cdot\eta}c(x,\xi,\lambda)\,dx.$$

Эта функция, как нетрудно проверить (умножением слева на η^α и интегрированием по частям) быстро убывает при $\eta\to\infty$.

Далее надо рассмотреть

$$V(\eta,\lambda)=(1+|\eta|^m+|\lambda|)(1+|\eta|)^{s-p}(Fv)(\eta,\lambda),\quad U(\xi)=(1+|\xi|)^s(Ff)(\xi).$$

Мы имеем

$$V(\eta,\lambda)=\int e(\eta,\xi,\lambda)U(\xi)\,d\xi,$$

где $e(\eta,\xi,\lambda)$ легко выписывается. При помощи *неравенства Питре*

$$\left(\frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}\right)^{\pm1}\leq 1+|\eta-\xi| \tag{26}$$

(полезно проверить его самостоятельно) проверяется, что

$$|e(\eta,\xi,\lambda)| \le C(1+|\eta-\xi|)^{-n-1},$$

этого достаточно для получения нужной оценки

$$||V(\eta,\lambda)||_0 \le C'||U(\xi)||_0. \qquad \square$$

Введем операторы

$$B_{\theta,l}(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi} b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi. \tag{27}$$

При фиксированном $\lambda \in L_\rho$ это оператор порядка $-m-l$ в $\mathbb{R}^n$. С учетом оценки для $b_{\theta,l}$ из лекции 9 (неравенство (20)) получаем из предложения 4

5. *При* $s\in\mathbb{R}$, $\lambda\in L_\rho$

$$||B_{\theta,l}(\lambda)f||_{s+m+l} + |\lambda|\cdot||B_{\theta,l}(\lambda)f||_{s+l} \le C'_{s,l}||f||_s. \tag{28}$$

Положим

$$B^{(N)}(\lambda) = B^{(N)}_\theta(\lambda) = B_{\theta,0}(\lambda) + \cdots + B_{\theta,N}(\lambda). \tag{29}$$

Этот оператор назовем *параметриксом порядка* N *для оператора* $A(\lambda) = A - \lambda I$. Из того же предложения 4 вытекает

6. *При* $N\in\mathbb{Z}_+$, $\lambda\in L_\rho$, $s\in\mathbb{R}$

$$||B^{(N)}(\lambda)f||_{s+m} + |\lambda|||B^{(N)}(\lambda)f||_s \le C_{s,N}||f||_s. \tag{30}$$

Еще одно следствие получается для оператора с символом

$$r_N(x,\xi,\lambda) = \sum_{|\alpha|\le N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha[a(x,\xi)-\lambda]\cdot D_x^\alpha\sum_{l=0}^N b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda) - 1 \tag{21}$$

с учетом оценки для него, приведенной в лекции 9:

$$|\partial_x^\gamma r_N(x,\xi,\lambda)| \le C_{\gamma,N}\frac{(1+|\xi|)^{m-N-1}}{1+|\xi|^m+|\lambda|}. \tag{22}$$

7. *Для оператора*

$$C_N(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi} r_N(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi \tag{31}$$

при $\lambda\in L_\rho$, $s\in\mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$||C_N(\lambda)f(x)||_{s+N+1} + |\lambda|\cdot||C_N(\lambda)f||_{s+N+1-m} \le C'_{s,N}||f||_s. \tag{32}$$

Пусть φ, ψ – функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\psi = 1$ в окрестности носителя функции φ. Тогда

$$[B^{(N)}(\lambda)(\psi\cdot) - \psi B^{(N)}(\lambda)](\varphi\cdot) = \chi B^{N)}(\lambda)(\varphi\cdot), \tag{33}$$

где $\chi = 1 - \psi \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$; носители функций φ и χ не пересекаются.

8. *Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ и носители функций φ, χ не пересекаются. Тогда при $\lambda \in L_\rho$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$ и сколь угодно большом q*

$$(1 + |\lambda|)^2 ||\chi B^{(N)}(\lambda)(\varphi f)||_{s+q} \leq C_{s,q,N} ||f||_s. \tag{34}$$

Это некоторая подготовка к переходу на многообразие. Благодаря тому, что носители функций φ и χ не пересекаются, удается “заработать” повышение порядка нормы на любое q, но степень множителя с $|\lambda|$ поднять выше 2 в общем случае нельзя.

Положим

$$T_N(\lambda) = A(\lambda)B^{(N)}(\lambda) - I. \tag{35}$$

9. *При $\lambda \in L_\rho$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$*

$$||T_N(\lambda)f||_{s+N+1} + |\lambda| ||T_N(\lambda)f||_{s+N+1-m} \leq C''_{s,N} ||f||_s. \tag{36}$$

Это ключевое предложение, в котором выясняется, насколько хорош параметрикс порядка N.

. Пусть $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $g(\eta) = (Ff)(\eta)$. Запишем

$$h(y, \eta, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} b_{\theta,k}(y, \eta, \lambda) = h_1(\eta, \lambda) + h_2(y, \eta, \lambda), \tag{37}$$

где $h_1(\eta, \lambda)$ совпадает с левой частью при $|y| \geq r$ и поэтому не зависит от y, а $h_2(y, \eta, \lambda)$ обращается в нуль при $|y| \geq r$. Запишем оператор $T^{(N)}(\lambda)$ в виде

$$T^{(N)}(\lambda) = C_N(\lambda) + C'_N(\lambda), \tag{38}$$

где $C_N(\lambda)$ – оператор (31). Для этого оператора нужная оценка указана в (32).

Чтобы выписать формулу для $C'_N(\lambda)f$, нужно разложить символ $a(x, \xi)$ по формуле Тейлора:

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} [\partial_\eta^\alpha a(x, \eta)](\xi - \eta)^\alpha + r_N^{(1)}(x, \xi, \eta). \tag{39}$$

Вычисления показывают, что

$$C'_N(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-2n} \int e^{ix\cdot\xi} d\xi \int e^{-iy\cdot\xi} dy \int e^{ix\cdot\eta} r_N^{(1)}(x, \xi, \eta) h_2(y, \eta, \lambda) g(\eta)\, d\eta.$$

Эту формулу удается преобразовать к виду

$$C'_N(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\eta} b_N(x, \eta, \lambda) g(\eta)\, d\eta \tag{40}$$

и показать, что b_N удовлетворяет такой же оценке, как r_N, так что нужная оценка для $C'_N(\lambda)f$ тоже получается. В итоге получается требуемый результат (36). □

10. *Пусть функции φ, ψ принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\psi(x) = 1$ в окрестности носителя функции φ. Тогда для оператора*

$$T_{N,\varphi,\psi}(\lambda) = [A(\lambda)\psi B^{(N)}(\lambda) - I](\varphi\cdot) \tag{41}$$

справедлива оценка, аналогичная (36).

6. M. Пусть теперь A – полиоднородный ПДО порядка m на замкнутом многообразии M, эллиптический с параметром в угле L с биссектрисой $\mathbb{R}_-$. Зафиксируем покрытие $\{O_q\}_1^K$ многообразия координатными окрестностями; пусть $\{\varphi_q\}$ – система бесконечно гладких функций на M, образующих подчиненное этому покрытию разбиение единицы, и $\{\psi_q\}$ – вторая система бесконечно гладких функций на M с носителями в O_q, такая, что $\psi_q = 1$ в окрестности носителя функции φ_q. Переходя к локальным координатам в O_q, можно предположить, что локально наш оператор совпадает с ПДО A_q в $\mathbb{R}^n$, эллиптическим с параметром в L. Чтобы уточнить это утверждение о локальном совпадении, предположим, что заданы еще две системы бесконечно гладких функций $\{\chi_q\}$ и $\{\theta_q\}$ на M с носителями в O_q, причем $\chi_q = 1$ в окрестности носителя функции ψ_q и $\theta_q = 1$ в окрестности носителя функции χ_q. Совпадение имеет место в смысле

$$\theta_q A(\chi_q\cdot) = \theta_q A\chi_q\cdot)$$

после привычных нам отождествлений функций с малыми носителями на многообразии M и в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $B_q^{(N)}(\lambda)$ – параметрикс в $\mathbb{R}^n$ порядка N для $A_q(\lambda) = A_q - \lambda I$, построенный в области L_ρ; можно считать, что ρ не зависит от q. Определим *параметрикс порядка N для $A(\lambda) = A - \lambda I$* формулой

$$B^{(N)}(\lambda) = \sum_{q=1}^{K} \psi_q B_q^{(N)}(\lambda)(\varphi_q\cdot) \quad (\lambda \in L_\rho,\ N = 0, 1, \dots). \tag{1}$$

Из описанных выше результатов в $\mathbb{R}^n$ выводятся следующие теоремы.

1. *При $\lambda \in L_\rho$, $s \in \mathbb{R}_+$, $N = 0, 1, \dots$ справедливы оценки*

$$||B^{(N)}(\lambda)f||_{s+m,M} + |\lambda| \cdot ||B^{(N)}(\lambda)f||_{s,M} \le C_s ||f||_{s,M}, \tag{2}$$

где C_s не зависит от λ и f.

Положим

$$T^{(N)}(\lambda) = A(\lambda)B^{(N)}(\lambda) - I. \tag{3}$$

2. *При $\lambda \in L_\rho$, $s \in \mathbb{R}$, $N = 0, 1, \dots$*

$$||T^{(N)}(\lambda)f||_{s+N+1,M} + |\lambda| \cdot ||T^{(N)}(\lambda)f||_{s+N+1-m,M} \le C'_s ||f||_{s,M}, \tag{4}$$

где C'_s не зависит от λ и f.

Из последней теоремы следует, что оператор $I+T^{(N)}$ при фиксированном s и $N\geq\max(0,m-1)$ обратим, если $\lambda\in L$ достаточно велико по модулю, причем обратный выражается сходящимся по норме рядом Неймана, и тогда существует правый обратный к $A(\lambda)$ оператор

$$R(\lambda)=B^{(N)}(\lambda)[I+T^{(N)}(\lambda)]^{-1}=B^{(N)}(\lambda)\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}[T^{(N)}(\lambda)]^k\right]. \tag{5}$$

Он является и левым обратным, поскольку независимо доказывается априорная оценка

$$||u||_{s+m,M}+|\lambda|\cdot||u||_{s,M}\leq C^{(s)}||A(\lambda)u||_{s,M} \tag{6}$$

при больших по модулю $\lambda\in L$, из которой следует единственность. Таким образом, (5) – резольвента. Далее, так как оператор $A(\lambda)$ эллиптичен, то $\operatorname{Ker}A(\lambda)$ не зависит от s, так что размерность этого ядра равна нулю при всех s. То же верно в отношении равенства индекса нулю. Поэтому из обратимости $A(\lambda)$ с фиксированным λ при некотором s вытекает обратимость при всех s.

. Это замечание следовало сделать раньше. Для справедливости оценки

$$|\lambda|\cdot||u||_s\leq C^{(s)}||A(\lambda)u||_s \tag{7}$$

(для простоты она написана в $\mathbb{R}^n$) эллиптичность с параметром необходима. Доказательство проводится от противного с использованием функций

$$u(x)=\varphi(x)e^{i\tau x\cdot\xi_0}, \tag{8}$$

где φ – функция с малым носителем, равная 1 в окрестности рассматриваемой точки x_0, и значений $\lambda=\tau^m\lambda_0$, $\tau>0$.

Из оценок (2) и (4) и формулы (5) вытекает

1. *При достаточно больших по модулю $\lambda\in L$*

$$|\lambda|^2||[R(\lambda)-B^{(N)}(\lambda)]f||_{s+N+1-m,M}\leq C_{s,M}||f||_{s,M} \tag{9}$$

7. . Теперь мы предположим, что $m>n$. Тогда из второй теоремы Агмона следует, что $R(\lambda)$ и $B^{(N)}(\lambda)$ – операторы с непрерывными ядрами. Более того, взяв N достаточно большим, мы при помощи неравенства (9) можем оценить модуль разности этих ядер, он убывает как $|\lambda|^{-2}$. Так как поведение ядер слагаемых, из которых состоит оператор $B^{(N)}(\lambda)$, более или менее легко выясняется из явных формул для этих операторов, то мы получим асимптотику ядра $K(x,y,\lambda)$ резольвенты при $\lambda\to\infty$ в L с точностью до $O(|\lambda|^{-2})$. Она интересна при $x=y$ и имеет вид (это содержание следующей лекции)

$$K(x,x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n+[m]}c_k(x)(-\lambda)^{\frac{n-k}{m}-1}+O(|\lambda|^{-2}), \tag{10}$$

если m нецелое и $[m]$ – его целая часть, и

$$K(x,x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n+m-1}c_k(x)(-\lambda)^{\frac{n-k}{m}-1}+\widetilde{c}(x)(-\lambda)^{-2}\ln(-\lambda)+O(|\lambda|^{-2}) \qquad (11)$$

с оценками остатков, равномерными по x и λ. (В (10) и (11) берутся ветви степени $(-\lambda)^\gamma$ и логарифма $\ln(-\lambda)$, совпадающие соответственно с $|\lambda|^\gamma$ и $\ln|\lambda|$ на $\mathbb{R}_-$.) В случае дифференциального оператора удается получить бесконечное асимптотическое разложение ядра $K(x,x,\lambda)$ по убывающим степеням $-\lambda$. Что же касается барьера $O(|\lambda|^{-2})$ в общем случае ПДО, то его удается преодолеть кружным путем, сначала надо рассмотреть степени ПДО, об этом поговорим позднее. При $m\le n$ надо рассматривать ядро степени резольвенты.