Лекция 11

Итак, мы предполагаем, что порядок m оператора A больше размерности n, и хотим получить асимптотику ядра $K(x,y,\lambda)$ резольвенты $R_A(\lambda)$ "на диагонали", т.е. при $x = y$. Это ядро, как и ядро $K^{(N)}(x,y,\lambda)$ параметрикса $B^{(N)}(x,y,\lambda)$, – непрерывные функции по второй теореме Агмона. Параметр λ принадлежит углу L эллиптичности с параметром (с биссектрисой $\mathbb{R}_-$) и по модулю берется настолько большим, что резольвента существует. Наша цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

1. *При* $\lambda \to \infty$ *в* L

$$K(x,x,\lambda) = \sum_{l=0}^{n+[m]} c_l(x)(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + O(|\lambda|^{-2}), \tag{1}$$

если m *нецелое и* $[m]$ *– его целая часть, и*

$$K(x,x,\lambda) = \sum_{l=0}^{n+m-1} c_l(x)(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + \widetilde{c}(x)(-\lambda)^{-2}\ln(-\lambda) + O(|\lambda|^{-2}), \tag{2}$$

если m *целое. Оценки остаточных членов равномерны по* x *и* $\arg\lambda$.

мы проведем полностью в несколько более простом случае нецелого m и затем с небольшими купюрами в случае целого m. Выбор N определяется тем, что нам нужна оценка

$$|K(x,x,\lambda) - K^{(N)}(x,x,\lambda)| \le C|\lambda|^{-2}. \tag{3}$$

Будем считать m нецелым. Как видно из неравенства

$$|\lambda|^2 \cdot \|[R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)]f\|_{s+N+1-m,M} \le C_{s,M}\|f\|_{s,M}, \tag{4}$$

надо иметь $N + 1 - m > n$. Мы возьмем

$$N = [m] + n. \tag{5}$$

Можно было бы взять и бо́льшее N, но это усложнило бы рассуждения и не привело бы к улучшению результата.

Вспомним, что

$$B^{(N)}(\lambda) = \sum_{q=1}^{K} \psi_q B_q^{(N)}(\lambda)(\varphi_q \cdot) \quad (\lambda \in L_\rho,\ N = 0,1,\dots). \tag{6}$$

Носители функций φ_q и ψ_q принадлежат q-й координатной окрестности, φ_q образуют разбиение единицы. В локальных координатах при фиксированном q

$$B_q^{(N)}(\lambda) = B_{0,q}(\lambda) + \dots + B_{N,q}(\lambda). \tag{7}$$

Мы сознательно не написали здесь индекс θ. Дело в том, что $B_l(\lambda)$ при используемых сейчас индексах $l=0,\dots,N$ можно писать без ремонта символов этих операторов при малых ξ. Поясним это. В локальных координатах

$$B_{l,q}(\lambda)f(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}b_{l,q}(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Здесь

$$b_{l,q}(x,\xi,\lambda)=\sum_{k\geq 2}\frac{b_{l,k,q}(x,\xi)}{[a_0(x,\xi)-\lambda]^k}, \tag{9}$$

где сумма конечна и

$$b_{l,k,q}(x,\tau\xi)=\tau^{(k-1)m-l}b_{l,k,q}(x,\xi)\quad(\xi\neq 0,\ \tau>0). \tag{10}$$

Здесь даже при $k=2$ и $l=N$ порядок однородности по ξ есть $m-N>-n$ в силу нашего соглашения (5) о N. Поэтому неинтегрируемой особенности при $\xi=0$ нет, и нужда в ремонте не возникает, поскольку нам не нужно было дифференцировать символы по ξ.

Порядки операторов (8) ниже $-n$, и эти операторы тоже имеют непрерывные ядра

$$k_{l,q}(x,y,\lambda)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}b_{l,q}(x,\xi,\lambda)\,d\xi. \tag{11}$$

Непрерывность видна и из этих формул. В частности, при $x=y$

$$k_{l,q}(x,x,\lambda)=(2\pi)^{-n}\int b_{l,q}(x,\xi,\lambda)\,d\xi. \tag{12}$$

Функции $b_{l,q}(x,\xi,\lambda)$ обладают свойством однородности

$$b_{l,q}(x,\tau\xi,\tau^m\lambda)=\tau^{-m-l}b_{l,q}(x,\xi,\lambda)\quad(\xi\neq 0,\tau>0). \tag{13}$$

Пусть сначала $\lambda\in\mathbb{R}_-$. Сделаем в последнем интеграле замену

$$\xi=|\lambda|^{1/m}\eta=(-\lambda)^{1/m}\eta. \tag{14}$$

Получим

$$k_{l,q}(x,x,\lambda)=(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1}(2\pi)^{-n}\int b_{l,q}(x,\xi,-1)\,d\xi. \tag{15}$$

Теперь мы положим

$$c_l(x)=(2\pi)^{-n}\sum_{q=1}^{K}\varphi_q(x)\int b_{l,q}(x,\xi,-1)\,d\xi \tag{16}$$

с обычными отождествлениями точек на M и в $\mathbb{R}^n$. При нецелом m сразу получаем нужную асимптотику (1).

Формулы (15) аналитическим продолжением распространяются на $\lambda\in L$, оценки сохраняются, и асимптотика (1) получается во всем угле L равномерно по всем направлениям.

Теперь обсудим случай целого m. Чтобы иметь (3), придется взять

$$N = m + n, \tag{17}$$

и теперь уже без ремонта символов при малых ξ не обойтись. Но неприятность, заставляющая сделать этот ремонт, возникает в единственном месте, а именно в формуле для $b_{N,q}(x, \xi, \lambda)$ и, еще точнее, в $b_{N,2,q}(x, \xi)$, см. формулу (9), это числитель первой дроби справа. Здесь особенность неинтегрируема. Остальные слагаемые в этой формуле не имеют такой особенности и дают вклад $O(|\lambda|^{-2})$ в асимптотику ядра $K(x, x, \lambda)$, что поглощается остаточным членом в формуле (2). Формально рассуждая, следовало бы определить параметрикс с отремонтированными символами, заменить их не отремонтированными в тех слагаемых, в которых это возможно, добиваясь однородности при $\xi \neq 0$, и показать, что возникающие при этом добавочные слагаемые имеют порядок $O(|\lambda|^{-2})$. Это возможно, но нудно. Ограничимся рассмотрением следующего интеграла от дроби $b_{m+n,2,q}/[a_0 - \lambda]^2$ (опуская индекс q):

$$-(2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \geq 1} \frac{a_{m+n}(x, \xi)}{[a_0(x, \xi) - \lambda]^2} \, d\xi. \tag{18}$$

Пусть опять сначала $\lambda \in \mathbb{R}$. Сделаем замену (14) и перейдем к сферическим координатам ($\eta = r\omega$, $|\omega| = 1$). Получим

$$-(2\pi)^{-n} |\lambda|^{-2} \int_{|\lambda|^{-1/m}}^{\infty} \frac{dr}{r} \int_{|\omega|=1} \frac{a_{m+n}(x, \omega) \, dS_\omega}{[r^m a_0(x, \omega) + 1]^2}.$$

Так как это выражение интересует нас с точностью до прибавления $O(|\lambda|^{-2})$, то в интеграле по r можно заменить верхний предел конечным числом $h > 0$ и затем заменить r^m нулем в интеграле по единичной сфере. Получим, что это выражение равно

$$\frac{-1}{(2\pi)^n m} |\lambda|^{-2} \ln |\lambda| \int_{|\omega|=1} a_{m+n}(x, \omega) \, dS + O(|\lambda|^{-2}).$$

На остальные λ вычисление главной части этого выражения распространяется аналитическим продолжением. Оценка остаточного члена сохраняется.

Получаем формулу (2) с

$$\widetilde{c}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^n m} \sum_{q=1}^{K} \varphi_q(x) \int_{|\omega|=1} a_{m+n,q}(x, \omega) \, dS. \tag{19}$$

(В случае дифференциальных операторов этот коэффициент (19) равен, конечно, нулю.) $\square$

Отметим еще, что хотя коэффициенты в (1) и (2) вычисляются интегрированием в локальных координатах, они при заданной на многообразии плотности имеют инвариантный смысл как коэффициенты асимптотики ядра данного оператора.

Старший коэффициент допускает инвариантную запись

$$c_0 = (2\pi)^{-n} \int_{T_x^* M} [a_0(x, \xi) + 1]^{-1} \, d\xi. \tag{20}$$

Интегрированием по M мы получаем асимптотику следа ядра резольвенты:

. *При предположениях теоремы* 1 *имеет место асимптотика*

$$\int_M K(x,x,\lambda)\,dx == \sum_{l=0}^{n+[m]} c_l(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + O(|\lambda|^{-2}), \tag{21}$$

если m нецелое и $[m]$ *– его целая часть, и*

$$\int_M K(x,x,\lambda)\,dx = \sum_{l=0}^{n+m-1} c_l(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + \widetilde{c}(-\lambda)^{-2}\ln(-\lambda) + O(|\lambda|^{-2}), \tag{22}$$

если m целое. Коэффициенты c_l *и* $\widetilde{c}$ *– это интегралы соответственно от* $c_l(x)$ *и* $\widetilde{c}(x)$. *В частности,*

$$c_0 = (2\pi)^{-n}\int_{T^*M}[a_0(x,\xi)+1]^{-1}dx\,d\xi; \tag{23}$$

здесь плотность $dx\,d\xi$ *не зависит от выбора локальных координат. Оценки остаточных членов равномерны по* $\arg\lambda$.

Теперь мы кратко обсудим случай, когда A – оператор в частных производных. Как уже сказано, в этом случае из-за отсутствия членов a_j с $j > m$ улучшается структура формул для b_l при росте l. При $\lambda \in L$ с модулем, превосходящим положительную постоянную, получается оценка

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_l(x,\xi,\lambda)| \le C_{\alpha,\beta,l}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-1-\frac{l+|\beta|}{m}}. \tag{24}$$

По существу мы находимся в рамках исчисления Шубина (а не Грубб). Оценка для r_N принимает вид

$$|\partial_x^\gamma r_N(x,\xi,\lambda)| \le C_{\gamma,N}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-\frac{N+1}{m}}. \tag{25}$$

Если $c(x,\xi,\lambda)$ – непрерывная со всеми производными по x функция, удовлетворяющая при всех α неравенствам

$$|\partial_x^\alpha c(x,\xi,\lambda)| \le C_\alpha(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-p}, \tag{26}$$

где $p > 0$, то для оператора $C(\lambda)$ в $\mathbb{R}^n$ с этим символом получается оценка

$$||C(\lambda)f||_{s+mp} + |\lambda|^p||C(\lambda)f||_s \le C_s||f||_s. \tag{27}$$

Это приводит к следующему результату для оператора $T^{(N)}$ на M при $N > m$:

$$||T^{(N)}(\lambda)f||_{s+N+1+m,M} + |\lambda|^{\frac{N+1+m}{m}}||T^N(\lambda)f||_{s,M} \le C_{s,N}||f||_{s,M}. \tag{28}$$

Далее, для достаточно больших по модулю $\lambda \in L$ и $N > m$

$$||[R(\lambda)-B^{(N)}(\lambda)]f||_{s+m+N+1,M} + |\lambda|^{\frac{m+N+1}{m}}||[R(\lambda)-B^{(N)}(\lambda)]f||_{s,M} \le C_{s,N}||f||_{s,M}. \tag{29}$$

Вот окончательная теорема:

2. *При сделанных выше предположениях об операторе в частных производных на M порядка $m > n$ для любого натурального N*

$$K(x,x,\lambda) = \sum_{l=0}^{N} c_l(x)(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + O(|\lambda|^{\frac{n-N-1}{m}-1}) \tag{30}$$

при $\lambda \to \infty$ в L с оценкой остатка, равномерной по x и $\arg\lambda$.

Интегрируя по M, получаем сколь угодно точную асимптотику следа ядра резольвенты.

8. . Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty$ – неубывающая последовательность неотрицательных чисел, стремящаяся к бесконечности. Через $N(\lambda)$ обозначим ее *функцию распределения*: это число членов λ_j последовательности, не превосходящих λ:

$$N(\lambda) = \mathrm{card}\{j : \lambda_j \le \lambda\}. \tag{1}$$

Очевидно, что это неубывающая неотрицательная функция, стремящаяся к бесконечности при $\lambda \to \infty$.

1. *Соотношение*

$$\lambda_j = \alpha j^\beta + o(j^\beta) \quad (j \to \infty) \tag{2}$$

эквивалентно соотношению

$$N(\lambda) = \gamma\lambda^\delta + o(\lambda^\delta) \quad (\lambda \to \infty), \tag{3}$$

где

$$\delta = \frac{1}{\beta}, \quad \gamma = \frac{1}{\alpha^\delta}. \tag{4}$$

. Пусть выполнено соотношение (3). Тогда $\lambda_j \to \infty$. При $\lambda = \lambda_j$ имеем $N(\lambda) = j$, так что

$$\frac{j}{\gamma\lambda_j^\delta} \to 1 \quad (j \to \infty). \tag{5}$$

Возводя дробь слева в степень $-\beta$, получаем

$$\frac{\lambda_j}{\alpha j^\beta} \to 1, \tag{6}$$

т.е. соотношение (2).

Обратно, пусть выполнено соотношение (2). Тогда имеем (6) и (5), или

$$\frac{N(\lambda_j)}{\gamma\lambda_j^\delta} \to 1 \quad (j \to \infty). \tag{7}$$

Из (2) следует также, что $\lambda_{j+1}/\lambda_j \to 1$. Поэтому

$$\frac{N(\lambda_j)}{\gamma\lambda_{j+1}^\delta} \to 1. \tag{8}$$

При $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$ мы имеем $N(\lambda) = N(\lambda_j)$ и

$$\frac{N(\lambda_j)}{\gamma\lambda_{j+1}^\delta} < \frac{N(\lambda)}{\gamma\lambda^\delta} < \frac{N(\lambda_j)}{\gamma\lambda_j^\delta}.$$

Отсюда и из (7)–(8) получается (3). $\square$

Определим *преобразование Стильтьеса* функции $N(\lambda)$, заданной на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$ и локально имеющей ограниченное изменение, формулой

$$S(\zeta) = \int_0^\infty (\lambda - \zeta)^{-1} dN(\lambda) \quad (\zeta \notin \overline{\mathbb{R}}_+). \tag{9}$$

Сходимость этого интеграла обеспечивается условием

$$\int_0^\infty \lambda^{-1} dN(\lambda) < \infty. \tag{10}$$

В частности, если $N(\lambda)$ имеет вид (1), то

$$S(\zeta) = \sum_{j=1}^\infty (\lambda_j - \zeta)^{-1}, \tag{11}$$

а условие (10) принимает вид

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{-1} < \infty. \tag{12}$$

Иногда преобразование (9) рассматривают только при вещественных $\zeta = -\mu < 0$. Положим

$$\mathcal{S}(\mu) = S(-\mu) = \int_0^\infty (\lambda + \mu)^{-1} dN(\lambda) \quad (\mu > 0). \tag{13}$$

. Проверьте, что если $N(\lambda) = \gamma\lambda^\delta$, $0 < \delta < 1$, то $\mathcal{S}(\mu) = \rho\mu^{\delta-1}$, где

$$\rho = \gamma\delta B(\delta, 1-\delta) = \frac{\gamma\pi\delta}{\sin\pi\delta}\,. \tag{14}$$

Следующая теорема, называемая *абелевой теоремой для преобразования Стильтьеса*, справедлива без предположения о монотонности функции $N(\lambda)$.

2. *Пусть* $0 < \delta < 1$ *и* $N(\lambda)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)\lambda^{-\delta} = \gamma. \tag{15}$$

Тогда

$$\lim_{\mu\to\infty} \mu^{1-\delta}\mathcal{S}(\mu) = \rho, \tag{16}$$

где ρ *определено в* (14).

Доказательство обсуждать не будем. Обратной к этой теореме является нужная нам *тауберова теорема Харди–Литтльвуда*:

3. *Пусть* $0 < \delta < 1$ *и* $N(\lambda)$ *– неубывающая функция, для которой выполнено условие* (10), *и пусть для ее преобразования Стильтьеса имеет место соотношение* (16). *Тогда справедливо соотношение* (15).