Лекция 12

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $N(\lambda)$ – функция распределения неубывающей последовательности положительных чисел λ_l. Это кусочно-постоянная функция, она постоянна между соседними точками λ_l и испытывает скачки в этих точках, причем непрерывна в них справа. В этом случае

$$S(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \zeta}, \tag{1}$$

это абсолютно сходящийся ряд с суммой, голоморфной всюду, кроме точек λ_j.

1. В нужном нам случае, когда λ_j – собственные значения самосопряженного ПДО порядка $m > n$, эта функция имеет асимптотику

$$S(\zeta) = c(-\zeta)^{n/m-1} + O(|\zeta|^{(n-1)/m-1}) \tag{2}$$

вне сколь угодно узкого угла с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ с равномерной оценкой остатка.

Нам понадобится полезное *неравенство Плейеля*, оно придумано Плейелем для приближенного обращения преобразования Стильтьеса $N(\lambda) \mapsto S(\zeta)$.

4 (неравенство Плейеля). *Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\zeta = \lambda_0 + i\eta_0$, $\eta_0 > 0$, $\overline{\zeta}_0 = \lambda_0 - i\eta_0$, и пусть Γ_{ζ_0} – спрямляемая ориентированная кривая, идущая из $\overline{\zeta}_0$ в ζ_0 и не пересекающая $\overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда*

$$\left| N(\lambda_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\zeta_0}} S(\zeta)\, d\zeta + \frac{\eta_0}{\pi} \operatorname{Re} S(\zeta_0) \right| \le \frac{\eta_0}{2} |\operatorname{Im} S(\zeta_0)|. \tag{3}$$

. *Справедливо неравенство*

$$\left| N(\lambda_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\zeta_0}} S(\zeta)\, d\zeta \right| \le C_0 \eta_0 |S(\zeta_0)|, \tag{4}$$

где $C_0 = (\pi^{-2} + 2^{-2})^{1/2}$.

Применять мы будем неравенство (4), а доказывать – неравенство (3).

(3). При доказательстве будем предполагать функцию $N(\lambda)$ постоянной вблизи λ_0, на точки скачка оно переносится предельным переходом. Обозначим через Γ замкнутый контур, получаемый добавлением к Γ_{ζ_0} вертикального отрезка, идущего из ζ_0 в $\overline{\zeta}_0$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S(\zeta)\, d\zeta = N(\lambda_0).$$

Поэтому неравенство (3) можно переписать в виде

$$\left| \frac{1}{2i} \int_{\overline{\zeta}_0}^{\zeta_0} S(\zeta)\, d\zeta - \eta_0 \operatorname{Re} S(\zeta_0) \right| \le \frac{\pi}{2} \eta_0 |\operatorname{Im} S(\zeta_0)|. \tag{5}$$

В таком виде и будем его доказывать. Мы имеем

$$\frac{1}{2i}\int_{\overline{\zeta}_0}^{\zeta_0} S(\zeta)\,d\zeta = \int_0^\infty I(\lambda)\,dN(\lambda), \tag{6}$$

где

$$I(\lambda) = \frac{1}{2i}\int_{\overline{\zeta}_0}^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{\lambda-\zeta}\,. \tag{7}$$

Считая, что здесь интеграл берется по вертикальному отрезку и λ отлично от λ_0, сделаем замену

$$\zeta = \lambda_0 + i|\lambda-\lambda_0|\tau \tag{8}$$

и положим

$$s(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda-\lambda_0), \quad u(\lambda) = \eta_0|\lambda-\lambda_0|^{-1}. \tag{9}$$

Цель этих замен выяснится ниже, см. переход от (13) к (14). Получим

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{2}\int_{-u(\lambda)}^{u(\lambda)} \frac{d\tau}{s(\lambda)-i\tau} = \frac{1}{2}\int_{-u(\lambda)}^{u(\lambda)} \frac{s(\lambda)+i\tau}{1+\tau^2}\,d\tau \\ &= s(\lambda)\int_0^{u(\lambda)} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = s(\lambda)\operatorname{arctg} u(\lambda). \end{aligned} \tag{10}$$

В тех же обозначениях (9)

$$\begin{gathered} S(\zeta_0) = \int_0^\infty \frac{dN(\lambda)}{\lambda-\zeta_0} = \\ \int_0^\infty \frac{dN(\lambda)}{|\lambda-\lambda_0|[s(\lambda)-iu(\lambda)]} = \eta_0^{-1}\int_0^\infty \frac{s(\lambda)u(\lambda)+iu^2(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda), \end{gathered} \tag{11}$$

так что

$$\eta_0 \operatorname{Re} S(\zeta_0) = \int_0^\infty \frac{s(\lambda)u(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda), \quad \eta_0 \operatorname{Im} S(\zeta_0) = \int_0^\infty \frac{u^2(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda). \tag{12}$$

Теперь неравенство (5) можно переписать в виде

$$\left|\int_0^\infty s(\lambda)\left[\operatorname{arctg} u(\lambda) - \frac{u(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\right]dN(\lambda)\right| \le \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{u^2(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda). \tag{13}$$

Ясно, что оно следует из неравенства

$$\left|\operatorname{arctg} u - \frac{u}{1+u^2}\right| \le \frac{\pi}{2}\frac{u^2}{1+u^2} \quad (u>0). \tag{14}$$

Разность слева под знаком модуля равна 0 при $u=0$ и имеет положительную производную при $u>0$. Значит, она положительна при $u>0$, модуль можно снять и переписать (14) в виде

$$\operatorname{arctg} u < \frac{u}{1+u^2} + \frac{\pi}{2}\frac{u^2}{1+u^2}. \tag{15}$$

При $u \geq \pi/2$ это неравенство вытекает из неравенства $\operatorname{arctg} u < \pi/2$. Остается проверить его при $0 < u < \pi/2$. Достаточно проверить, что при этих u производная левой части меньше производной правой части. Но это неравенство для производных, как легко проверить, следует из неравенства $u < \pi/2$. □

Возвращаясь к теореме Харди–Литтльвуда, сделаем следующее замечание. Как мы видели, при наших предположениях функция $S(\zeta)$ голоморфна вне сколь угодно узкой окрестности луча $\mathbb{R}_+$. Легко также проверить, что она ограничена вне любой такой окрестности. Согласно формулировке теоремы, мы имеем

$$(-\zeta)^{1-\delta} S(\zeta) \to \rho \tag{16}$$

вдоль луча $\mathbb{R}_-$. Отсюда следует, что это соотношение выполняется равномерно при $|\arg \zeta| \geq \varepsilon$ в силу теоремы Монтеля.[1] Впрочем, в интересующем нас случае это просто нам дано, см. (2).

3 (Харди–Литтльвуда). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\zeta_0 = (1 + i\varepsilon)\lambda_0$, здесь λ_0 будет стремиться к $+\infty$. Пусть Γ_{ζ_0} – дуга окружности с центром в начале, огибающая его слева и идущая из $\overline{\zeta}_0$ в ζ_0. В силу только что сделанного замечания найдется настолько большое $r(\varepsilon)$, что

$$|S(\zeta) - \rho(-\zeta)^{\delta-1}| \leq \varepsilon |\zeta|^{\delta-1} \ \text{ при } \ \zeta \in \Gamma_{\zeta_0}, \ \ \lambda_0 \geq r(\varepsilon). \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda_0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\zeta_0}} (-\zeta)^{\delta-1} d\zeta. \tag{18}$$

При помощи замены $\zeta = \lambda_0 z$ получаем

$$I(\lambda_0, \varepsilon) = \lambda_0^{\delta} I(1, \varepsilon) = \lambda_0^{\delta} [I(1,0) + h(\varepsilon)], \tag{19}$$

где $h(\varepsilon)$ не зависит от λ_0 и стремится к 0 при $\varepsilon \to +0$, а

$$I(1,0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (-z)^{\delta-1} dz$$

с обходом единичной окружности из $1 - i0$ по часовой стрелке (следует обратить внимание на знак минус перед z). Эту окружность можно заменить двумя отрезками из 1 в 0 и из 0 в 1 соответственно по нижнему и верхнему берегам разреза вдоль $\mathbb{R}_+$. Получаем

$$I(1,0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 t^{\delta-1} dt \, [e^{-i\pi(\delta-1)} - e^{i\pi(\delta-1)}] = \rho \, \frac{\sin \pi\delta}{\pi\delta} = \gamma. \tag{20}$$

Теперь применяем неравенство (4) в сочетании с (17)–(20). Получаем

$$|N(\lambda_0) - \gamma \lambda_0^{\delta}[\leq C[\varepsilon + |h(\varepsilon)|],$$

---

[1] $f(z)$ $\{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$. l $z \to \infty$ $\{z : \arg z = \gamma, \ \alpha < \gamma < \beta$. $\{z : \alpha + \delta \leq \arg z \leq \beta - \delta\}$ $\delta > 0$. C. , , . 5.

где C не зависит от ε и λ_0, если это не точка скачка функции $N(\lambda)$. Последнее ограничение автоматически снимается. Число ε можно сделать сколь угодно малым, увеличивая λ_0. Отсюда получается нужный результат. $\square$

9. . (Пожалуйста, найдите сами теоремы, которые используются дальше в этом пункте.) Снова пусть A – ПДО порядка $m > n$ на M, самосопряженный в $L_2(M)$ и имеющий спектр $\sigma(A)$, полуограниченный снизу. Поскольку мы сейчас интересуемся асимптотикой собственных значений, можно, не ограничивая общности, принять, что все они положительны. Так как норма резольвенты $R(\lambda)$ самосопряженного оператора A равна $1/d(\lambda)$, где $d(\lambda)$ – расстояние от точки λ до спектра $\sigma(A)$, то вне любого фиксированного угла с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ верна оценка

$$|\lambda|\|u\|_{0,M} \leq C\|(A-\lambda I)u\|_{0,M}, \tag{1}$$

а отсюда, как мы знаем, следует эллиптичность с параметром в дополнении L к этому углу. Для следа резольвенты у нас получена асимптотика

$$\mathrm{tr}\, R_A(\zeta) = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_l - \zeta} = c_0(-\zeta)^{\frac{n}{m}-1} + O(|\zeta|^{\frac{n-1}{m}-1}) \quad (L \ni \zeta \to \infty). \tag{2}$$

где

$$c_0 = (2\pi)^{-n} \iint_{T^*M} \frac{1}{a_0(x,\xi)+1}\, dx\, d\xi \tag{3}$$

и a_0 – главный символ ПДО A; он положителен. По теореме Харди–Литтльвуда (или непосредственно из неравенства Плейеля[2]) получается, что функция распределения $N(\lambda)$ собственных значений λ_l имеет асимптотику

$$N(\lambda) = \gamma\lambda^{\frac{n}{m}} + o(\lambda^{\frac{n}{m}}) \quad (\lambda \to +\infty), \tag{4}$$

где

$$\gamma = \frac{c_0}{\frac{n}{m}B(\frac{n}{m}, 1-\frac{n}{m})}. \tag{5}$$

Это на самом деле уже спектральная асимптотика. Но из (5) следует асимптотическая формула для самих собственных значений:

$$\lambda_j = \alpha j^{\frac{m}{n}} + o(j^{\frac{m}{n}}), \qquad \text{где} \ \ \alpha = \gamma^{-m/n}. \tag{6}$$

Отметим, что из неравенства Плейеля с учетом того, что в (2) мы имеем оценку остаточного члена, получается некоторая оценка остаточного члена как в (5), так и в (6). Но наиболее точная (неулучшаемая) оценка остаточного члена в спектральной асимптотике получается из изучения функции e^{itA} от оператора A. Формула с такой оценкой имеет вид

$$N(\lambda) = \gamma\lambda^{\frac{n}{m}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{m}}). \tag{7}$$

или

$$\lambda_j = \alpha j^{\frac{m}{n}} + O(j^{\frac{m-1}{n}}). \tag{8}$$

---

[2] , ζ A, $\zeta \in \mathbb{R}_-$. .

Для скалярных ПДО это теорема Хёрмандера (1968).

В заключение покажем, что формула (5) для γ может быть преобразована к такому виду:

$$\gamma = (2\pi)^{-n} \iint_{a_0(x,\xi)\leq 1} dx\, d\xi. \tag{8}$$

Для доказательств достаточно в локальных координатах проверить при фиксированном x, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a_0(x,\xi)+1}\, d\xi = \delta B(\delta, 1-\delta) \int_{a_0(x,\xi)<1} d\xi, \text{ где } \delta = \frac{n}{m}. \tag{9}$$

Перейдем здесь слева и справа к сферическим координатам $r = |\xi|$, $\omega = \xi/r$ и сделаем замену $r^m a_0(x,\omega) = t$. Доказываемое равенство примет вид

$$\int_0^\infty t^{\delta-1}(t+1)^{-1}\, dt \int_{|\xi|=1} a_0^{-\delta}\, dS = \delta B(\delta, 1-\delta) \int_0^1 t^{\delta-1}\, dt \int_{|\xi|=1} a_0^{-\delta}\, dS,$$

или

$$\int_0^\infty t^{\delta-1}(t+1)^{-1} dt = B(\delta, 1-\delta).$$

Но это одна из известных формул для функции Эйлера $B(\delta, 1-\delta)$.