Лекция 13

10. . В этом пункте мы докажем следующую теорему.

1. *Пусть A – эллиптический ПДО из Ψ_{ph}^{m}, $m > 0$, на замкнутом многообразии M, позитивный в угловой окрестности луча $\mathbb{R}_{-}$, и пусть $a_0(x,\xi)$ – его главный символ. Тогда при любом комплексном z оператор A^z – ПДО из Ψ_{ph}^{mz} с главным символом $[a_0(x,\xi)]^z$.*

Здесь мы впервые сталкиваемся с ситуацией, когда главный символ (на самом деле и дальнейшие члены разложения локального полного символа) может иметь комплексную степень однородности:

$$[a_0(x,t\xi)]^z = t^{mz} a_0(x,\xi) \quad (t > 0). \tag{1}$$

На этот случай обобщаются наши определения и результаты, относящиеся к полиоднородным ПДО.

Будет указан способ построения локального полного символа оператора A^z.

. Для $\delta > 0$ обозначим через Γ_δ контур, состоящий из нижнего и верхнего берегов разреза вдоль луча $(-\infty, -\delta]$ и соединяющей их концы окружности $\{\lambda : |\lambda| = \delta\}$ с обходом против часовой стрелки. При $\operatorname{Re} z < 0$ оператор A^z можно определить формулой

$$A^z = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z R(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

где $R(\lambda) = A - \lambda I$ и $\lambda^z = \exp[z(\ln|\lambda| + i \arg\lambda)]$, $|\arg\lambda| \le \pi$; разрез при определении λ^z сделан вдоль $\mathbb{R}_{-}$. Число δ берем настолько малым, что при $\rho = 2\delta$ в

$$L_\rho = \overline{\mathbb{R}}_{-} \cup \{\lambda : |\lambda| \le \rho\}, \tag{3}$$

существуют и резольвента $R(\lambda)$, и аппроксимирующий ее параметрикс $B^{(N)}(\lambda)$ любого порядка N. Интеграл в (2) абсолютно, т.е. по операторной норме, сходится в любом $H^s(M)$.

Положим при $\operatorname{Re} z < 0$

$$A_{N,z} = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z B^{(N)}(\lambda)\, d\lambda. \tag{4}$$

Этот интеграл тоже сходится по операторной норме в любом $H^s(M)$.

Рассмотрим разность

$$A^z - A_{N,z} = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z [R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)]\, d\lambda.$$

Следующее неравенство справедливо при $\tau = 0$ и $\tau = 2$:

$$|\lambda|^\tau \|[R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)] f\|_{s+\sigma+N+1,M} \le C_\tau \|f\|_{s,M}, \tag{5}$$

где $\sigma = m(1-\tau)$ и постоянная C_τ не зависит от λ и f. Отсюда можно вывести, учитывая структуру норм, что оно справедливо при всех промежуточных τ. Воспользуемся им при $\tau = 1$. Получим

$$\|[A^z - A_{N,z}]f\|_{s+N+1,M} \leq C_1 \int_{\Gamma_\delta} |\lambda|^{\operatorname{Re} z - 1} |d\lambda| \|f\|_{s,M} \leq C_2 \|f\|_{s,M}. \tag{6}$$

Таким образом, оператор A^z совпадает с $A_{N,z}$ с точностью до прибавления оператора порядка $-N-1$. Теперь нужно учесть структуру оператора $B^{(N)}(\lambda)$ в (4). Имеем

$$A_{N,z} f = \sum_{q=1}^{K} \psi_q (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z B_q^{(N)}(\lambda)(\varphi_q f)\, d\lambda. \tag{7}$$

Здесь q-е слагаемое в локальных координатах в O_q записывается в виде

$$\psi_q(x) \sum_{l=0}^{N} (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z (2\pi)^{-n} \int b_{\theta,l}^{(q)}(x,\xi,\lambda) F(\varphi_q f)(\xi)\, d\xi\, d\lambda, \tag{8}$$

Этот повторный интеграл абсолютно сходится, так что можно изменить порядок интегрирования и переписать (8) в виде

$$\psi_q(x) \sum_{l=0}^{N} (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,\xi) F(\varphi_q f)(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,\xi) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z b_{\theta,l}^{(q)}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda \\ &= -\operatorname{Res}_{\lambda = a_0(x,\xi)} \{\lambda^z b_l^{(q)}(x,\xi,\lambda)\}, \end{aligned} \tag{10}$$

так как контур интегрирования можно заменить замкнутым контуром, обходящим единственный полюс $a_{\theta,0}(x,\xi)$ функций $b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)$ по часовой стрелке. Как нетрудно проверить,

$$c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,t\xi) = t^{mz-l} c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,\xi)(x,\xi) \quad (|\xi| \geq 1, t \geq 1) \tag{11}$$

и $c_{\theta,l,z} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Отсюда видно, что (9) – ПДО из $\Psi_{ph}^{mz}(\mathbb{R}^n)$. Как следствие $A_{N,z}$ – ПДО из $\Psi_{ph}^{mz}(M)$, и то же получается для A^z.

Подробнее. По символам $c_{\theta,l,z}$ мы строим символ $c_z(x,\xi)$ с разложением

$$c_z^{(q)}(x,\xi) \sim c_{\theta,0,z}^{(q)} + c_{\theta,i,z}^{(q)} + \dots. \tag{12}$$

Здесь слагаемые не вполне однородны. Но их можно заменить следующими:

$$c_{l,z}^{(q)}(x,\xi) = |\xi|^{mz-l} c_{\theta,l}^{(q)}(x,\xi/|\xi|) \quad (\xi \neq 0), \tag{13}$$

это уже положительно однородные функции степени $mz-l$, и мы имеем

$$c_z^{(q)}(x,\xi) \approx c_{0,z}^{(q)}(x,\xi) + c_{1,z}^{(q)}(x,\xi) + \dots \tag{14}$$

Этому символу отвечает ПДО $A_{z,q} \in \Psi_{ph}^{mz}(\mathbb{R}^n)$. Строим ПДО A_z на M по формуле

$$A_z = \sum_{q=1}^{K} \psi_q A_{z,q}(\varphi_q \cdot). \tag{15}$$

От него ПДО A^z отличается на бесконечно сглаживающее слагаемое.

Так как $b_0 = (a_0-\lambda)^{-1}$, то главный символ ПДО A^z есть

$$c_{0,z} = a_0^z = |a_0|^z \exp(iz \arg a_0) \tag{16}$$

(напомним,что у нас $|\arg a_0| < \pi$).

Наконец, на случай $\operatorname{Re} z \geq 0$ полученные результаты распространяются при помощи формулы $A^z = A^s \cdot A^{z-s}$, где s – натуральное число и $\operatorname{Re} z - s < 0$, с использованием теоремы о композиции ПДО. □

. *При предположениях теоремы A^z – эллиптический оператор, изоморфно и непрерывно отображающий $H^{s+m \operatorname{Re} z}(M)$ на $H^s(M)$ при любых $s \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$.*

Действительно, порядок этого ПДО в соболевской шкале, как нетрудно проверить, равен $m \operatorname{Re} z$. Остается проверить, что $\operatorname{Ker} A^z = \{0\}$ и что индекс этого оператора равен нулю. Первое утверждение следует из того, что если $A^z u = 0$, то $u \in C^\infty(M)$ и $Au = A^{1-z}A^z u = 0$, так что $Au = 0$ и $u = 0$. Чтобы проверить второе, достаточно убедиться в том, что $\operatorname{Ker}(A^z)^* = \{0\}$. Это следует из того, что A^* – тоже позитивный оператор и $(A^z)^* = (A^*)^{\overline{z}}$. □

В частности, мы видим, что при $\operatorname{Re} z = 0$ оператор A^z ограничен. Такого свойства нет в общем случае для абстрактных операторов.

Далее, отметим, что A^z при $m \operatorname{Re} z < h$ – голоморфная функция от z со значениями, в пространстве операторов, действующих, например, ограниченным образом из $H^{s+h}(M)$ в $H^s(M)$ (с любым фиксированным s). Такого в абстрактном случае тоже, конечно, нет.

Пусть, в частности, $A = A^*$ – самосопряженный ПДО положительного порядка m на M с ортонормированным базисом $\{e_j\}_1^\infty$ из собственных функций и положительными собственными значениями $\lambda_j \nearrow \infty$. Тогда $A^z e_\nu = \lambda_\nu^z e_\nu$, оператор $A^{s/m}$ изоморфно и непрерывно отображает $H^s(M)$ на $H^0(M)$, и в $H^s(M)$ можно ввести норму

$$\|A^{s/m}u\|_{0,M} = \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2s/m} |(u,e_\nu)|^2\right]^{1/2}, \tag{17}$$

она эквивалентна обычной норме в $H^s(M)$.

Если пользоваться в $H^s(M)$ отвечающим этой норме скалярным произведением

$$(A^{s/m}u, A^{s/m}v)_0 = \sum \lambda^{2s/m}(u,e_\nu)_{0,M}\overline{(v,e_\nu)}_{0,M}, \tag{18}$$

то A^z будет нормальным оператором в $H^s(M)$ при любом z, так как будет иметь там ортонормированный базис из собственных функций, самосопряженным при $z \in \mathbb{R}$. При $\operatorname{Re} z > 0$ область определения этого оператора – пространство $H^{s+m\operatorname{Re} z}(M)$.

В частности, изоморфизмы между соболевскими пространствами $H^s(M)$ теперь можно определять при помощи степеней оператора

$$\Lambda = (I - \Delta)^{1/2}, \tag{19}$$

где Δ – оператор Бельтрами–Лапласа.

A^z. ПДО A^z является интегральным оператором с непрерывным ядром $K_z(x, y)$ при $m\operatorname{Re} z < -n$, т.е. при $\operatorname{Re} z < -n/m$. Это следует из второй теоремы Агмона. То же самое верно для операторов $A_{N,z}$, аппроксимирующих A^z. Но операторы $A_{N,z}$ допускают явное построение, и, используя их, удается доказать следующую теорему.

1. *Ядро $K_z(x, y)$ голоморфно по z при $\operatorname{Re} z < -n/m$. Его сужение $K_z(x, x)$ на диагональ в $M \times M$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с возможными полюсами только в точках $z = (l - n)/m$ $(l = 0, 1, \dots)$. Все полюсы являются простыми, и вычеты в них вычисляются следующим образом*:

$$\rho_l(x) = \frac{1}{(2\pi)^n m} \sum_{q=1}^{K} \varphi_q(x) \int_{|\omega|=1} \operatorname{Res}_{\lambda = a_0^{(q)}(x,\omega)} \left[\lambda^{\frac{l-n}{m}} b_l^{(q)}(x, \omega, \lambda)\right] dS. \tag{1}$$

В соответствии с формулой (2) из предыдущего пункта функция $\lambda^{(l-n)/m}$ здесь и дальше голоморфна вне $\overline{\mathbb{R}}_-$ и положительна на R_+.

Вычет в первом полюсе $z = -n/m$ выражается формулой

$$\rho_0(x) = \frac{-1}{(2\pi)^n m} \sum_{q=1}^{K} \varphi_q(x) \int_{|\omega|=1} [a_0^{(q)}(x, \omega)]^{-n/m} dS. \tag{2}$$

На полное доказательство уже нет времени. Ключевой момент в нем состоит в следующем. Главная часть ядра l-го слагаемого в операторе (9) из предыдущего пункта при $x = y$ – это интеграл

$$(2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \geq 1} c_{l,z}\, d\xi.$$

Переходя здесь к сферическим координатам, получим, что это выражение равно

$$(2\pi)^{-n} \int_{|\xi|=1} c_{l,z}(x, \omega)\, dS \int_1^\infty r^{mz-l+n-1}\, dr =$$
$$\frac{-1}{(2\pi)^n (mz - l + n)} \int_{|\xi|=1} c_{l,z}(x, \omega)\, dS.$$

Ясно, что это выражение имеет простой полюс в точке $z = l - n/m$ с очевидным вычетом.

Дополнительные детали состоят в следующем. При $x \neq y$ ядро $K_z(x,y)$ продолжается до целой аналитической функции от z. Мероморфное продолжение ядра $K_z(x,x)$ не имеет полюса в точке $z = 0$, и его значение в этой точке выписывается.

Если A – дифференциальный оператор, то оно не имеет полюсов также в точках $z = j$ $(j = 0, 1, \ldots)$, и его значения в этих точках тоже выписываются.

Интегрируя по M, получаем числовую функцию

$$\zeta(z, A) = \operatorname{tr} A^z = \int_M K_z(x,x)\,dx \quad (\operatorname{Re} z < -n/m). \tag{3}$$

Она называется *дзета-функцией оператора* A. Из теоремы 1 вытекает, что она голоморфна по z и допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с возможными полюсами только в точках $z = (l-n)/m$ $(l = 0, 1, \ldots)$. При этом все полюсы являются простыми, и вычеты в них получаются интегрированием выражений (1) по M.

В точке $z = 0$ нет полюса, и значение этой функции в нуле выражается формулой

$$\zeta(0, A) = \frac{1}{(2\pi)^n m} \sum_{q=1}^{K} \int_M \varphi_q(x)\,dx \int_{|\omega|=1} dS \int_0^\infty b_n^{(q)}(x, \omega, -\sigma)\,d\sigma. \tag{4}$$

Если A – ДО, то полюсов нет во всех точках $z = j$ $(j = 0, 1, \ldots)$, и значения аналитического продолжения $\zeta(l.A)$ в эти точки также выписываются. Значение $\zeta(l, A)$ называется *регуляризованным следом порядка* l *оператора* A.

Теперь мы выведем *аналитическую формулу для индекса* произвольного эллиптического ПДО L на M положительного порядка m. Для этого введем операторы

$$A_1 = I + L^*L \ \text{ и } \ A_2 = I + LL^*. \tag{5}$$

Легко понять, что это самосопряженные ПДО с собственными значениями, лежащими на луче $[1, \infty)$, так как

$$(A_1 f, f) = (f, f) + (Lf, Lf), \quad (A_2 f, f) = (f, f) + (L^* f, L^* f) \tag{6}$$

(скалярные произведения берутся по M). Поэтому мы можем рассмотреть функции $\zeta(z, A_1)$ и $\zeta(z, A_2)$. Из (6) видно также, что кратности собственного значения 1 у операторов A_1 и A_2 равны соответственно $\dim \operatorname{Ker} L$ и $\dim \operatorname{Ker} L^*$. С другой стороны, остальные собственные значения имеют у A_1 и A_2 одинаковые кратности. Это видно из того, что при $\lambda > 1$

$$A_1 u = \lambda u, \quad Lu = v \Longleftrightarrow A_2 v = \lambda v, \quad u = L^{-1} v.$$

Аналогично обстоит дело с A_1^z и A_2^z, и при $\operatorname{Re} z < -n/2m$ получаем

$$\varkappa(L) = \operatorname{tr} L_1^z - \operatorname{tr} L_2^z. \tag{7}$$

Используя теперь голоморфное продолжение дзета-функций в точку 0, получаем

$$\varkappa(L) = \zeta(0, A_1) - \zeta(0, A_2). \tag{8}$$

Это и есть желаемая формула. Правая часть вычисляется через слагаемые $a_0, \dots, a_n$ в асимптотическом разложении локального полного символа. На самом деле индекс зависит только от a_0. Формула (8) применяется в доказательстве формулы Атьи–Зингера для индекса.

В заключение отметим, что *асимптотическую формулу для собственных значений самосопряженного оператора* A из прошлой лекции можно заново получить при помощи следующей *тауберовой теоремы Икехары* (она доказана в книге Шубина), рассматривая след оператора A^{-z} (с обратным знаком перед z).

2. *Пусть* $N(t)$ *– неубывающая функция, равная* 0 *при* $t \le 1$ *и такая, что интеграл*

$$\zeta(z) = \int_1^z t^z \, dN(t)$$

сходится при $\operatorname{Re} z < -h$, *где* $h > 0$, *причем функция*

$$\zeta(z) + \frac{A}{z+h}$$

непрерывно продолжается в замкнутую правую полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z \le h\}$. *Тогда*

$$N(\lambda)\lambda^{-h} \to \frac{A}{h} \quad (\lambda \to \infty).$$

Заключительная обзорная лекция будет на второй неделе сентября.