Лекция 14 (обзорная и заключительная)

1. $\mathbb{R}^n$. . . . В нашем курсе главной целью было построение теории эллиптических ПДО на замкнутом многообразии. Для простоты символы $a(x,\xi)$ из класса $S^m_{1,0}$ предполагались подчиненными оценкам

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}, \tag{1}$$

равномерным по x. Если задачи ставятся в $\mathbb{R}^n$, это может оказаться неудобным (например, в квантовой механике). Принято определять тогда этот класс оценками

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \quad (x \in K), \tag{2}$$

где K –любой компакт из K.

Отсутствие равномерной по x ограниченности символов при ограниченных ξ создает трудности при построении исчисления ПДО. Становится нужным понятие собственного ПДО, которое мы сейчас определим. Пусть сначала $m < -n$. Тогда ПДО $a(x,D)$ – интегральный оператор с ядром

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\,d\xi.$$

Оно непрерывно.

Однако *ядро* K_A *в смысле Шварца* определено для любого оператора A, переводящего основные функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: оно определяется формулой

$$\langle Au, v\rangle = \langle K_A, u(y)v(x)\rangle \quad (u, v \in D(\mathbb{R}^n)), \tag{3}$$

и доказывается, что оно однозначно продолжается до обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ (теорема Лорана Шварца).

В случае ПДО A любого порядка с амплитудой $a(x,y,\xi)$ эта обобщенная функция определяется осциллирующим интегралом

$$\langle K_a, w\rangle = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) w(x,y)\,dx\,dy\,d\xi \quad (w \in \mathcal{D}(R^{2n})). \tag{4}$$

Ее сингулярный носитель сосредоточен на диагонали $x = y$ в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$.

Итак, ПДО $a(x,D)$ всегда имеет ядро $K_A(x,y)$ в смысле обобщенных функций. Рассмотрим его носитель $\operatorname{supp} K_A(x,y)$. ПДО A называется *собственным*, если проекции этого носителя на координатные пространства $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^n_y$ обладают следующим свойством: прообраз компакта – компакт.

В случае дифференциального оператора носитель его ядра – диагональ $x = y$ в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$, поэтому дифференциальный оператор является собственным ПДО. В общем случае, чтобы превратить ПДО в собственный, достаточно умножить его амплитуду на бесконечно гладкую функцию $\Theta(x-y)$, равную единице при малых $|x-y|$ и нулю при достаточно больших $|x-y|$. Это умножение не затрагивает сингулярный носитель ядра, так как он находится на диагонали $x = y$.

Оценки (1) и (2) хороши, если мы интересуемся эллиптическими ПДО (не обязательно равномерно эллиптическими). Более общие классы $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ определяются оценками

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|} \quad (x \in K). \tag{5}$$

При однократном дифференцировании символа по ξ его порядок понижается не на 1, а на ρ, а при однократном дифференцировании по x этот порядок ухудшается на δ. Числа ρ и δ лежат на отрезке $[0,1]$. Относительно легкий случай – когда $\rho > \delta$. В частности, если при этом условии носитель ядра – компакт и $m = 0$, то оператор продолжается до ограниченного оператора в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Эти классы нужны при изучении вырождающихся эллиптических операторов и построении параметриксов для них.

Подробности, относящиеся к этим классам, можно смотреть в книгах М.А. Шубина ("ПДО и спектральная теория") и Л.Хёрмандера.

У Шубина определены также интересные классы символов в $\mathbb{R}^n$ с оценками

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+\xi|)^{m-\rho(|\alpha|+|\beta|)}, \tag{6}$$

где $\rho \in (0,1]$, в простейшем случае $\rho = 1$. Здесь поведение символов при их дифференцировании по x и ξ "одинаково". Еще одна книга по таким ПДО – Helffer, 1984. Однако ПДО определяется по символу вот какой формулой:

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) u(y)\,dy\,d\xi. \tag{7}$$

Это определение интересно, в частности, тем, что вещественному символу отвечает самосопряженный оператор. Такие ПДО появились в двадцатые годы прошлого века у Германа Вейля в квантовой механике. Псевдодифференциальными операторами в квантовой механике специально занимался Ф.А. Березин, он написал интересные работы. Шубин с ним контактировал, у них есть общие книги.

Пример дифференциального оператора из квантовой механики: оператор Шрёдингера для гармонического осциллятора на оси

$$\frac{h^2}{2m}D^2 + \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right).$$

Здесь символ имеет второй порядок роста как по x, так и по ξ.

2. . Окружность и тор – это такие многообразия, на которых существует единая система координат. На окружности имеется в виду периодическая координата x, ее значения, отличающиеся на $2\pi k$ с целым k, отвечают одной и той же точке. Такую систему координат можно ввести на любой замкнутой кривой, и в этом смысле замкнутая кривая не отличается от окружности. Рассмотрим оператор следующего вида:

$$Au(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a(x,l)e^{ixl}c_l(u), \ \text{ где } \ c_l(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(y)e^{-ily}\,dy. \tag{8}$$

Здесь $c_l(u)$ – коэффициент Фурье функции u по тригонометрической системе экспонент. Структура этого оператора похожа на структуру ПДО в $\mathbb{R}^n$,

$$Au(x) = F^{-1}_{\xi\to x} a(x,\xi)(Fu)(\xi),$$

только в (8) вместо прямого преобразования Фурье используется переход от функции к набору ее коэффициентов Фурье, а вместо обратного преобразования Фурье – суммирование ряда по экспонентам. Оказывается, что если $a(x,\xi)$ – полиоднородный символ на $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$ из класса $S^m_{1,0}$ с главной частью $a_0(x,\xi)$, 2π-периодический по x, то (8) – полиоднородный ПДО на окружности порядка m с главным символом $a_0(x,\xi)$. Получаем ПДО "в дискретном представлении". Для такого ПДО глобально определены, как в $\mathbb{R}^n$, все члены разложения символа, а не только главный символ. Все исчисление ПДО на окружности можно строить, не выходя за рамки рядов (8) типа Фурье.

Такие ПДО на торе обсуждал Л.Р. Волевич на студенческом семинаре в середине 60-х гг., рассматривая их как адаптированную, игрушечную модель ПДО. Он даже ничего не опубликовал. Но позднее выяснилось, что это вовсе не игрушка, такое представление ПДО на окружности используется в спектральной теории ПДО на замкнутой кривой и в приближенных вычислениях. См. указания в моем обзоре в книге "Современные проблемы математики, Фундаментальные направления", т. 63, ВИНИТИ, 1990, и работы Wendland'а с соавторами, примерно 1993 г.

Единая система координат есть еще на нескольких многообразиях. Псевдодифференциальными операторами на них несколько лет назад занимался Turunen.

3. . ИОФ – интегральный оператор Фурье – более общий объект, чем ПДО. Формально он определяется так:

$$Au(x) = \iint e^{i\Phi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi. \tag{9}$$

Неформально это обобщенная функция, определяемая формулой

$$\langle Au, v\rangle = \iiint e^{i\Phi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi) u(y)\, dx\, dy\, d\xi \quad (u,v\in\mathcal{D}). \tag{10}$$

Здесь $a(x,y,\xi)$ – амплитуда, обычно из класса $S^0_{1,0}$. Иногда на этом месте пишут символ $a(x,\xi)$. Функция $\Phi(x,y,\xi)$, называемая *фазовой функцией*, обычно вещественна, иногда она пишется в виде $\Phi(x,\xi)$. Обычно она положительно однородна степени 1 по ξ или, по крайней мере, принадлежит классу $S^1_{1,0}$. Предполагается также, что при $\xi\neq 0$ ее градиент (или градиент по x,y) не обращается в нуль. Обе функции бесконечно гладкие (по крайней мере, при $\xi\neq 0$). В случае ПДО

$$\Phi = (x-y)\cdot\xi.$$

Мы знаем, что если A – ПДО и B – обратимый ПДО, то $B^{-1}AB$ – тоже ПДО с тем же главным символом. Грубо говоря, верен такой факт: если A – ПДО и B – обратимый ИОФ, то $B^{-1}AB$ – тоже ПДО и его главный символ можно найти, но он уже, вообще говоря, отличен от главного символа ПДО

A. Это обстоятельство можно использовать для упрощения главного символа ПДО при помощи преобразований подобия, что полезно в теории уравнений в частных производных и спектральной теории. Например, если мы на окружности имеем эллиптический ПДО A ненулевого порядка, то можно построить такой обратимый ИОФ B, что все члены асимптотического разложения полного символа ПДО $B^{-1}AB$ не будут зависеть от x (Г. Розенблюм). Это позволяет получить полное разложение собственного значения λ_n оператора A на замкнутой кривой (если A – оператор положительного порядка для простоты с неотрицательными собственными значениями, то они нумеруются в порядке неубывания с учетом кратности) в асимптотический ряд по убывающим целым степеням номера n.

Интегральные операторы Фурье ввел Хёрмандер (1968, 1971) но потом выяснилось, что в литературе уже существовал близкий объект – *канонический оператор* В.П. Маслова. Свою замечательную теорему о точной оценке остатка в асимптотике собственных значений самосопряженного эллиптического оператора Хёрмандер доказал именно при помощи ИОФ. Если A –неотрицательный самосопряженный эллиптический ПДО 1-го порядка (к этому случаю легко сводится случай произвольного положительного порядка), то в виде ИОФ можно приближенно построить оператор e^{-itA} при малых $|t|$ и изучить асимптотику его ядра и следа при $t \to 0$, а это (вместе с соответствующими тауберовыми теоремами) ключ к нахождению точной асимптотики собственных значений. (К сожалению, в случае матричного ПДО в общем случае это не получается.)

Оператор e^{-itA} позволяет решать задачу Коши для гиперболического уравнения $\partial_t u + iAu = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + iAu = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{11}$$

ИОФ позволяют изучить особенности фундаментального решения этой задачи Коши и тем самым выяснить, как распространяются особенности начальной функции при росте t. При этом интересен не только сингулярный носитель, но и *волновой фронт* обобщенной функции – некоторое множество в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. Определение такое: точка (x_0, ξ_0) не принадлежит волновому фронту $WF(u)$ обобщенной функции $u(x)$, если достаточно близко к x_0 она равна такой обобщенной функции $v(x)$ с компактным носителем, что ее преобразование Фурье $\widetilde{v}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0.

Литература: книги Хёрмандера, Шубина и Ю.В. Егорова (“Уравнения главного типа”, 1984).

4. . Ее изучил Seeley (1965). Особенно интересен случай ПДО неположительного порядка, так как тогда это ядро интегрального оператора. Фактически выясняется, какие интегральные операторы являются псевдодифференциальными. В частности, при нулевом порядке это сингулярные интегральные операторы (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши) с точностью до прибавления интегральных операторов с более гладкими ядрами.

Грубо говоря, результат такой: асимптотическому разложению локального полного символа по однородным символам убывающих порядков отвечает асимптотическое разложение ядра по функциям от $(x, x-y)$, положительно однородным по второму переменному возрастающих степеней, иногда с добавочными логарифмическими множителями. Подробности см. в моем обзоре.

Псевдодифференциальными операторами отрицательного порядка являются, например, такие операторы: берем фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ эллиптического оператора в $\mathbb{R}^n$ для простоты с постоянными коэффициентами и рассматриваем интегральный оператор на замкнутой гиперповерхности с ядром $\mathcal{E}(x-y)$. Это интересно, в частности, по той причине, что для таких интегральных операторов имеет смысл понятие эллиптичности и справедливы теоремы эллиптической теории. Примеры будут в следующем пункте.

5. . В нашем курсе не было времени для рассмотрения общих эллиптических граничных задач. Но мы сейчас можем кратко рассмотреть задачи, которые можно объяснить на основе обязательного курса по уравнениям математической физики. Рассмотрим, например, однородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \tag{12}$$

в ограниченной трехмерной области $G = G^+$ с гладкой границей S. Простейшие граничные условия на S ставятся следующим образом (плюсиком наверху обозначаем граничные значения). Это условие Дирихле

$$u^+ = f \tag{13}$$

или условие Неймана

$$\partial_\nu u^+ = g, \tag{14}$$

где ∂_ν – производная вдоль внешней (для определенности) нормали.

Эти задачи можно решать при помощи потенциалов простого и двойного слоя. Обозначим через $\mathcal{E}(x)$ фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i}k|x|}{|x|}. \tag{15}$$

Потенциал простого слоя с плотностью φ имеет вид

$$u(x) = \mathcal{A}\varphi(x) = \int_S \mathcal{E}(x-y)\varphi(y)\, dS_y\,. \tag{16}$$

Его сужение на S – интегральный оператор

$$A\varphi(x) = \int_S \mathcal{E}(x-y)\varphi(y)\, dS_y \quad (x \in S). \tag{17}$$

Оказывается, что это эллиптический ПДО порядка -1 с отрицательным главным символом. Решение задачи Дирихле можно искать (например) в виде (16), тогда для φ получается эллиптическое уравнение $A\varphi = f$ на S. Это интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, но "очень хорошее".

Решение задачи Неймана тоже можно искать в виде (16), тогда для φ получается уравнение

$$\Big(-\frac{1}{2}I + B'\Big)\varphi = g \quad (x \in S), \tag{18}$$

где B' – оператор, сопряженный к прямому значению оператора двойного слоя:

$$B'\varphi(x) = \int_S \partial_{\nu_x}\mathcal{E}(x-y)\varphi(y)\, dS_y\,. \tag{19}$$

Последний в случае гладкой поверхности – ПДО порядка не выше -1, так что слева в (18) – эллипический ПДО порядка 0.

Есть еще третье граничное условие, аналогичные внешние задачи, задачи сопряжения и спектральные задачи со спектральным параметром в граничном условии. Все эти задачи удобно исследовать при помощи ПДО. См. мою статью в УМН 2002, вып.5, и ссылки в ней.