Лекция 2

2. Эллиптичность с параметром

1. .

1. Пусть A – ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$ положительного порядка m на замкнутом многообразии M, пока для простоты скалярный, с главным символом $\sigma(x,\xi)$. Этот символ естественно положить равным нулю при $\xi = 0$. Пусть Λ – замкнутый угол (сектор) на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. ПДО A называется *эллиптическим с параметром в* Λ, если

$$\sigma(x,\xi) - \lambda \neq 0 \ \text{ при } \ x \in M, \ \ \lambda \in \Lambda, \ \ (\xi, \lambda) \neq 0. \tag{1}$$

Простейшие примеры:

1. Если главный символ $\sigma(x,\xi)$ является вещественной функцией, удовлетворяющей условию эллиптичности, то A эллиптичен с параметром в любом (замкнутом) угле Λ, не имеющем общих точек с вещественной осью, кроме начала координат. Если при этом главный символ принимает только положительные значения (на ненулевых кокасательных векторах), то эллиптичность с параметром имеет место в любом угле Λ, не имеющем общих точек с положительной полуосью, кроме начала координат. Таков, в частности, оператор Бельтрами–Лапласа с обратным знаком $-\Delta$ на римановом многообразии.

2. ПДО A назовем *сильно эллиптическим*, если

$$\operatorname{Re} \sigma(x,\xi) \geq C|\xi|^m \tag{2}$$

(мы считаем, что на многообразии введена метрика, так что можно говорить о длине кокасательного вектора). В этом случае эллиптичность с параметром имеет место в замкнутой левой полуплоскости. (Под сильной эллиптичностью в литературе чаще понимают неотрицательность главного символа; тогда эллиптичность с параметром имеет место в угле раствора меньше π с биссектрисой $\mathbb{R}_-$. Наше предположение является более жестким.)

Из условия (1) следует эллиптичность: достаточно положить $\lambda = 0$.

Оказывается, что из эллиптичности с параметром следует обратимость оператора $A - \lambda I$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ и возможность исследовать резольвенту $(A - \lambda I)^{-1}$, что открывает перспективу изучать другие функции от A.

2. . . Мы начнем со случая дифференциального оператора и докажем утверждение об обратимости классическим *методом локализации*, который был известен задолго до появления исчисления ПДО и часто полезен и в наше время.

Итак, мы докажем следующую теорему.

1. *Пусть оператор в частных производных A на M с гладкими коэффициентами положительного порядка m эллиптичен с параметром в угле Λ. Тогда уравнение*

$$(A - \lambda I)u = f \tag{3}$$

с правой частью из $H^0(M)$ имеет одно и только одно решение $u \in H^m(M)$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$. При этом справедлива априорная оценка

$$||u||_{m,M} + |\lambda| ||u||_{0,M} \leq C_1 ||(A-\lambda)u||_{0,M}, \tag{4}$$

где постоянная C_1 не зависит от u и λ.

Заметим, что $||(A-\lambda)u||_{0,M}$ очевидным образом при всех λ оценивается через левую часть в (4), в этом смысле оценка является двусторонней.

Для доказательства сначала надо рассматривать операторы в $\mathbb{R}^n$, эллиптические с параметром. Дадим соответствующее определение, в нем присутствует условие равномерности по x.

2. Пусть ПДО $A \in \Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$ имеет главный символ $\sigma(x,\xi)$; продолжим его нулем в точки $(x,0)$. Пусть Λ – замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. Мы скажем, что оператор A *эллиптичен с параметром в* Λ, если

$$|a(x,\xi) - \lambda| \geq C_2(|\xi|^m + |\lambda|) \text{ при } \lambda \in \Lambda, \tag{5}$$

где C_2 – постоянная, не зависящая от (x,ξ,λ), $\quad \xi \in \mathbb{R}^n$.

Отсюда следует равномерная эллиптичность: достаточно положить $\lambda = 0$.

Мы рассмотрим сначала уравнение в частных производных

$$(A - \lambda I)u = f \tag{6}$$

в $\mathbb{R}^n$ и при дополнительных предположениях докажем его однозначную разрешимость при больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ с априорной оценкой

$$||u||_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_3 ||f||_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{7}$$

1. Сначала предположим, что главный символ $\sigma(\xi)$ не зависит от x и (однородный) оператор A имеет вид

$$Au(x) = \sigma(D)u(x) = F^{-1}\sigma(\xi)Fu(x). \tag{8}$$

Тогда уравнение (6) при ненулевых $\lambda \in \Lambda$ решается по формуле

$$u(x) = F^{-1}[\sigma(\xi) - \lambda]^{-1}Ff. \tag{9}$$

Так как при $|\lambda| \geq C_4 > 0$, $\lambda \in \Lambda$

$$\frac{1 + |\xi|^{2m} + |\lambda|^2}{|\sigma(\xi) - \lambda|^2} \leq \text{Const}, \tag{10}$$

то при этих λ

$$||u||^2_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|^2 ||u||^2_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_5 ||f||^2_{0,\mathbb{R}^n}, \tag{11}$$

что равносильно оценке (7).

2. Теперь мы рассмотрим оператор $A = \sigma(x, D)$ без младших членов с "почти постоянными" коэффициентами, т.е. коэффициентами, достаточно близкими к их значениям в фиксированной точке:

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad |a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)| < \varepsilon, \tag{12}$$

где ε – малое положительное число. Оператор с коэффициентами $a_\alpha(x_0)$ обозначим через A_{x_0}. Эллиптичность с параметром в Λ сейчас достаточно предполагать для A_{x_0}. Оператор $A_{x_0} - \lambda I$ обратим при $0 \neq \lambda \in \Lambda$. Обратный оператор обозначим через $B(\lambda)$. Покажем, что при тех же λ, что и в предыдущем пункте доказательства, оператор A обратим и справедлива оценка вида (7), если ε достаточно мало.

Мы имеем

$$(A - \lambda I)B(\lambda) = (A - A_{x_0})B(\lambda) + I, \tag{13}$$

и здесь

$$||(A - A_{x_0})B(\lambda)f||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_6\varepsilon||B(\lambda)f||_{m,\mathbb{R}^n} \leq C_7\varepsilon||f||_0, \tag{14}$$

так что норма оператора $(A - A_{x_0})B(\lambda)$ меньше 1 при $C_7\varepsilon < 1$. Тогда оператор $A - \lambda I$ имеет правый обратный

$$(A - \lambda I)^{-1} = B(\lambda)[I + (A - A_{x_0})B(\lambda)]^{-1}. \tag{15}$$

Выведем теперь априорную оценку. Имеем

$$||u||_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|||u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_3||(A - \lambda I)u||_{0,\mathbb{R}^n} + C_3||(A - A_{x_0})u||_{0,\mathbb{R}^n}, \tag{16}$$

и здесь

$$C_3||(A - A_{x_0})u||_{0,R^n} \leq C_6\varepsilon||u||_{m,\mathbb{R}^n} < \tfrac{1}{2}||u||_{m,\mathbb{R}^n}, \tag{17}$$

если ε достаточно мало. Из (16) и (17) получаем оценку (7) с постоянной $2C_3$ вместо C_3.

3. Теперь мы включим в оператор A с почти постоянными старшими коэффициентами произвольные младшие члены. Будем считать, что он имеет вид $A = A_0 + A_1$, где A_0 – однородный оператор с почти постоянными коэффициентами, для которого результат уже установлен, а A_1 – произвольный оператор, для которого верна оценка

$$||A_1u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_9||u||_{m-1,\mathbb{R}^n}. \tag{20}$$

Нам понадобится *интерполяционное неравенство*: при $0 < l < m$ и сколь угодно малом $\varepsilon > 0$

$$||u||_{l,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon||u||_{m,\mathbb{R}^n} + C_\varepsilon||u||_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{21}$$

Его справедливость эквивалентна справедливости аналогичного неравенства с квадратами норм

$$||u||^2_{l,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon||u||^2_{m,\mathbb{R}^n} + C_\varepsilon||u||^2_{0,\mathbb{R}^n},$$

а последнее легко проверяется при помощи преобразования Фурье, так как

$$1+|\xi|^{2l} \leq \varepsilon(1+|\xi|^{2m})+C_\varepsilon$$

при больших $|\xi|$ за счет первого слагаемого справа, а при ограниченных ξ за счет второго при достаточно большом C_ε.

Пусть $B_0(\lambda)$ – оператор, обратный к $A_0-\lambda I$. Имеем

$$(A_0+A_1-\lambda I)B_0(\lambda)=I+A_1B_0(\lambda), \tag{22}$$

и здесь для $v(\lambda)=B_0(\lambda)f$ мы имеем

$$\begin{aligned} ||A_1B_0(\lambda)f||_{0,\mathbb{R}^n} \leq & C_{10}||v(\lambda)||_{m-1,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon||v(\lambda)||_{m,\mathbb{R}^n}+C'_\varepsilon||v(\lambda)||_{0,\mathbb{R}^n} \\ \leq & \varepsilon(||v(\lambda)||_{m,\mathbb{R}^n}+|\lambda|||v(\lambda)||_{0,\mathbb{R}^n}), \end{aligned} \tag{23}$$

если $C'_\varepsilon<\varepsilon|\lambda|$. Пусть для $A_0-\lambda I$ выполнено неравенство вида (7) с константой C_3. Тогда правая часть в (23) не превосходит $\varepsilon C_3||f||_{0,\mathbb{R}^n}$, и остается предположить, что $\varepsilon C_3<1$. Теперь оператор $A-\lambda I$ имеет правый обратный

$$(A-\lambda I)^{-1}=(A_0-\lambda I)^{-1}[I+A_1(A_0-\lambda I)^{-1}]^{-1}. \tag{24}$$

Остается получить априорную оценку для $A-\lambda I$. Имеем

$$||u||_{m,\mathbb{R}^n}+|\lambda|||u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_3||(A-\lambda I)u||_0+C_3||A_1u||_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{25}$$

Здесь

$$C_3||A_1u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_{11}||u||_{m-1,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon||u||_{m,\mathbb{R}^n}+C''_\varepsilon||u||_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{26}$$

Возьмем здесь, например, $\varepsilon=1/2$ и предположим, что $C''_\varepsilon<|\lambda|/2$. Получим неравенство вида (7) для $A-\lambda I$ с постоянной $2C_3$ вместо C_3.

Резюмируем результат для дифференциального оператора

$$A=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha \tag{27}$$

с достаточно "хорошими" коэффициентами (предположения о них уточним позже).

1. *Пусть оператор* (27) *эллиптичен с параметром в* Λ *при* $x=x_0$. *Тогда существуют такие* $\varepsilon>0$ *и* $\lambda_0>0$, *что если старшие коэффициенты в* A *отличаются от их значений при* $x=x_0$ *меньше чем на* ε, *то при* $|\lambda|\geq\lambda_0$, $\lambda\in\Lambda$ *уравнение* (6) *при любой функции* $f\in\mathbb{R}^n$ *имеет одно и только одно решение* $u\in H^m(\mathbb{R}^n)$ *с априорной оценкой вида* (7).

Вернемся теперь к рассмотрению оператора A на многообразии M.

1. Нам понадобится достаточно мелкое покрытие многообразия M координатными окрестностями O_j $(j=1,\ldots,N)$, гладкое разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_j=1$$

на M, где $\operatorname{supp}\varphi_j \subset O_j$, и система гладких функций ψ_j на M, где $\psi_j = 1$ в окрестности носителя функции φ_j и $\operatorname{supp}\psi_j \subset O_j$. Оператор A, записанный в локальных координатах в O_j, имеет там мало меняющиеся коэффициенты, мы продолжим его на $\mathbb{R}^n$ и обозначим продолженный оператор через A_j. Мы предположим, что все эти операторы имеют обратные $(A_j - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda| \geq \lambda_0$; очевидно, что это можно сделать, считая координатные окрестности достаточно мелкими. Теперь мы положим при этих λ

$$B(\lambda) = \sum \varphi_j (A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j.$$

и применим к $B(\lambda)f$ оператор $A - \lambda$. Получим

$$\sum (A_j - \lambda I)\varphi_j (A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j f,$$

так как можно считать, что на носителе функции φ_j оператор A, записанный в локальных координатах, совпадает с A_j. Отсюда

$$(A - \lambda I)B(\lambda)f = \sum \varphi_j \psi_j f + Tf, \tag{28}$$

где

$$Tf = \sum (A_j \varphi_j - \varphi_j A_j)(A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j f. \tag{29}$$

Первая сумма справа в (28) равна f. Коммутаторы $A_j\varphi - \varphi A_j$ – это операторы порядка не выше $m-1$. Поэтому j-е слагаемое справа в (29) не превосходит по норме

$$C_j \|(A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j f\|_{m-1,\mathbb{R}^n}.$$

Мы уже имеем опыт оценки таких выражений; при достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$ они не превосходят $\varepsilon\|\psi_j f\|_{0,\mathbb{R}^n}$ с любым наперед заданным $\varepsilon > 0$. Здесь норму по $\mathbb{R}^n$ можно заменить нормой по M. Число таких слагаемых конечно, а оператор умножения на ψ_j ограничен в $H^0(\mathbb{R}^n$. Отсюда нетрудно вывести, что $\|T\| < 1/2$ при больших по модулю λ, и тогда оператор $A - \lambda I$ имеет правый обратный

$$(A - \lambda I)^{-1} = B(\lambda)(I + T)^{-1}. \tag{30}$$

Нам осталось вывести априорную оценку (4). Мы имеем

$$\|u\|_{m,M} + |\lambda|\|u\|_{0,M} \leq \sum (\|\varphi_j u\|_{m,M} + |\lambda|\|\varphi_j u\|_{0,M})$$

и можем себе позволить оценивать слагаемые после замены норм соответствующими нормами в $\mathbb{R}^n$. Сумма оценивается через

$$\sum \|(A_j - \lambda I)\varphi_j u\|_{0,\mathbb{R}^n}.$$

Здесь надо прокоммутировать φ_j с оператором $A_j - \lambda I$. Сумма

$$\sum \|\varphi_j (A_j - \lambda I)u\|_{0,\mathbb{R}^n}$$

может быть заменена на

$$\sum \|\varphi_j (A - \lambda I)u\|_{0,M},$$

после чего оценивается через $C_{12}\|(A - \lambda I)u\|_{0,M}$. Слагаемые с коммутаторами оцениваются через нормы $\|\psi_j u\|_{m-1,\mathbb{R}^n}$, а последние оцениваются в том же духе, что и раньше, и не мешают получить нужную оценку при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Вместо проверки априорных оценок можно строить левые обратные операторы.