Лекция 3

3. . Ближайшее обобщение – случай *матричного* оператора A в частных производных на многообразии. Пусть он действует в пространстве вектор-функций размерности N. (Можно рассматривать и оператор, действующий в сечениях соболевских векторных расслоений над M, но это не будем обсуждать, избегая технических усложнений.) Его главный символ – $N \times N$-матрица $\sigma(x, \xi)$, положительно однородная степени m по ξ. Эллиптичность с параметром в угле Λ определяется как справедливость условия

$$\det[\sigma(x, \xi) - \lambda E] \neq 0 \quad ((x, \xi) \in T^*M, \ \ \lambda \in \Lambda, \ \ (\xi, \lambda) \neq 0),$$

где E – единичная $N \times N$-матрица. Аналогичное условие в $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что модуль определителя слева равномерно мажорирует $(|\xi|^m + |\lambda|)^N$. Теорема, доказываемая совершенно аналогично теореме 1 из лекции 2, состоит в однозначной разрешимости уравнения

$$(A - \lambda I)u = f \tag{1}$$

с $f \in H^0(M)$ в $H^m(M)$ (это сейчас соболевские пространства вектор-функций на M) при больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ с априорной оценкой

$$\|u\|_{m,M} + |\lambda| \|u\|_{0,M} \leq C \|(A - \lambda I)u\|_{0,M}. \tag{2}$$

Следующий этап обобщений – операторы, *полиномиально* зависящие от параметра. Заменяя в (1) λ на λ^m, можно предположить, что параметр имеет "вес" 1 (а не m) относительно дифференцирования. (Если в дальнейшем вес будет отличен от 1, то мы это будем специально оговаривать.) Теперь вместо $A - \lambda^m I$ мы рассмотрим оператор, локально имеющий вид

$$A(\lambda) = A(x, D, \lambda) = \sum_{|\alpha| + \beta \leq m} a_{\alpha,\beta}(x) \lambda^\beta D^\alpha \tag{3}$$

с гладкими коэффициентами. В его главный символ мы включим параметр; локально этот главный символ имеет вид

$$\sigma(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| + \beta = m} a_{\alpha,\beta}(x) \lambda^\beta \xi^\alpha, \tag{4}$$

и здесь инвариантно определены (как функции на T^*M) коэффициенты при каждой степени λ. Условие эллиптичности с параметром в угле Λ имеет теперь вид (в матричном случае)

$$\det \sigma(x, \xi, \lambda) \neq 0 \quad ((x, \xi) \in T^*M, \ \ \lambda \in \Lambda, \ \ (\xi, \lambda) \neq 0). \tag{5}$$

(В рассмотренном раньше случае мы теперь эллиптическим с параметром называем не оператор A, а оператор $A - \lambda^m$.) Аналогичное условие в $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что модуль левой части должен равномерно мажорировать $(|\xi| + |\lambda|)^N$. Далее, *мы можем повысить порядки соболевских норм* (что требует большей гладкости коэффициентов). Доказывается однозначная разрешимость при больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ уравнения

$$A(\lambda)u = f \tag{6}$$

в $H^t(M)$, $t \geq m$, при правой части из $H^{t-m}(M)$ с априорной оценкой

$$|||u|||_{t,M} \leq C|||A(\lambda)u|||_{t-m,M}, \tag{7}$$

где

$$|||u|||_{t,M} = [||u||^2_{t,M} + |\lambda|^{2t}||u||^2_{0,M}]^{1/2}. \tag{8}$$

При фиксированном λ это норма в $H^t(M)$, эквивалентная обычной норме без параметра. Аналогичные нормы вводятся в $\mathbb{R}^n$.

Поясним здесь два технических момента. Во-первых, при построении правого обратного оператора (как оператора, близкого к обратимому) нужно пользоваться в H^{t-m} нормой $|||\cdot|||_{t-m}$ вместо $||\cdot||_{t-m}$. Во-вторых, удобно использовать *интерполяционное неравенство* вида

$$|\lambda|^{l-k}||u||_k \leq C_{k,l}|||u|||_l \quad (0 < k < l). \tag{9}$$

В $\mathbb{R}^n$ оно проверяется при помощи преобразования Фурье. Из (9) следует, в частности, что при всех λ

$$|||A(x, D, \lambda)u|||_{t-m,M} \leq C'|||u|||_{t,M}, \tag{10}$$

так что имеет место *двусторонняя оценка*.

Возвращаясь к случаю дифференциального оператора в $\mathbb{R}^n$, отметим, что и в этом случае можно получить не только вспомогательные результаты, но и завершающий результат. Для простоты мы ограничимся обсуждением аналога теоремы 1 из предыдущей лекции.

Если мы хотим обойтись при его получении конечным разбиением единицы, то следует предположить, что старшие коэффициенты почти постоянны в окрестности бесконечности, т.е. что при $x \to \infty$ они стремятся к коэффициентам оператора, эллиптического с параметром в Λ и имеющего не зависящие от x коэффициенты. Тогда результаты для $\mathbb{R}^n$ звучат так же, как в случае (компактного) многообразия, и получаются так же; разница состоит только в том, что одна из функций в разбиении единицы будет иметь некомпактный носитель.

Однако можно обойтись и без предположения о стабилизации коэффициентов на бесконечности, используя такие же соображения, как в лекции 6 в прошлом семестре, и окончательный результат для $\mathbb{R}^n$ получается следующий. Мы пока завышаем нужную гладкость коэффициентов. Напомним, что $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство бесконечно гладких функций, у которых каждая производная ограничена.

2. *Пусть A – оператор в частных производных порядка m с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$, эллиптический с параметром в угле Λ. Тогда уравнение*

$$(A - \lambda I)u = f \tag{11}$$

с правой частью из $H^0(\mathbb{R}^n)$ имеет одно и только одно решение в $H^m(\mathbb{R}^n)$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ с априорной оценкой

$$||u||_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C||(A - \lambda I)u||_{0,\mathbb{R}^n}, \tag{12}$$

где постоянная не зависит от u и λ.

. Пусть φ и ψ – неотрицательные функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, первая равна 1 при $|x| \leq \sqrt{n}/2$, вторая равна 1 в окрестности носителя функции φ. Положим

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x - \alpha)\left[\sum_\beta \varphi(x - \beta)\right]^{-1}, \quad \psi_\alpha(x) = \psi(x - \alpha), \tag{13}$$

где α пробегает решетку в $\mathbb{R}^n$ с достаточно малым (насколько, скажем ниже) шагом. Сумма по β в каждой точке положительна и состоит из конечного равномерно ограниченного числа слагаемых. Функции φ_α образуют разбиение единицы.

Начнем снова с построения правого обратного оператора.

В силу ограниченности первых производных от старших коэффициентов оператора A эти старшие коэффициенты равномерно непрерывны. Кроме того, любая производная от любого коэффициента равномерно ограничена. Поэтому мы можем предположить, что при каждом α в окрестности носителя функции ψ_α оператор A совпадает с оператором A_α, таким, что для $A_\alpha - \lambda I$ имеет место предложение 1 об обратимости при $|\lambda| \geq \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$ из лекции 2 с не зависящими от α постоянными λ_0 и C_0 в неравенстве

$$||u||_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_0||(A_\alpha - \lambda I)u||_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{14}$$

Именно это требование определяет выбор шага в решетке.

Положим

$$B(\lambda) = \sum_\alpha \varphi_\alpha (A_\alpha - \lambda I)^{-1} \psi_\alpha \cdot . \tag{15}$$

Имеем

$$(A - \lambda)B(\lambda)f = \sum (A_\alpha - \lambda I)\varphi_\alpha (A_\alpha - \lambda I)^{-1}\psi_\alpha f = f + Tf, \tag{16}$$

где

$$T(\lambda)f = \sum (A_\alpha \varphi_\alpha - \varphi_\alpha A_\alpha) v_j(\lambda), \quad v_\alpha(\lambda) = (A_\alpha - \lambda I)^{-1}\psi_\alpha f. \tag{17}$$

Здесь

$$A_\alpha \varphi_\alpha - \varphi_\alpha A_\alpha = \sum_{|\beta| \leq m-1} a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta, \tag{18}$$

и в силу неравенства Шварца

$$|T(\lambda)f(x)|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}(x)|^2 \sum_{\alpha,\beta} |(D^\beta v_\alpha(\lambda))(x)|^2. \tag{19}$$

Интегрируя по x и учитывая равномерную ограниченность суммы квадратов модулей коэффициентов, получаем

$$||T(\lambda)f||^2_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_1 \sum ||v_\alpha(\lambda)||^2_{m-1,\mathbb{R}^n}. \tag{20}$$

Здесь норму под знаком суммы справа мы оценим сначала при помощи интерполяционного неравенства, а затем при помощи априорной оценки для $A_\alpha - \lambda I$, как уже сказано, равномерной по α. При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda_1 \geq \lambda_0$, что при $|\lambda| \geq \lambda_1$, $\lambda \in \Lambda$

$$||v_\alpha(\lambda)||^2_{m-1,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon ||\psi_\alpha f||^2_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{21}$$

Наконец,

$$\sum ||\psi_\alpha f||^2_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_2 ||f||^2_{0,\mathbb{R}^n} \tag{22}$$

ввиду равномерной ограниченности суммы квадратов функций ψ_α. Таким образом, $||T(\lambda)|| \leq 1/2$ при достаточно малом ε (и достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$), что и приводит к построению правого обратного оператора

$$(A - \lambda I)^{-1} = B(\lambda)[I + T(\lambda)]^{-1}. \tag{23}$$

Теперь выведем априорную оценку. Заметим, что в силу априорной оценки для равномерно эллиптического уравнения без параметра

$$||u||_{m,\mathbb{R}^n} \leq C_3[||Au||_{0,\mathbb{R}^n} + ||u||_{0,\mathbb{R}^n}] \leq C_4[||(A - \lambda I)u||_{0,\mathbb{R}^n} + ||u||_{0,\mathbb{R}^n} + |\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n}]. \tag{24}$$

Поэтому теперь следует оценивать $|\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n}$. Оценим квадрат этого выражения. Разбиение единицы переделаем так, чтобы иметь

$$\sum \varphi^2_\alpha(x) \equiv 1. \tag{25}$$

Для этого функции φ_α следует определить по формуле

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x - \alpha) \left[\sum_\beta \varphi^2(x - \beta) \right]^{-1/2}. \tag{26}$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 ||u||^2_{0,\mathbb{R}^n} &= \sum |\lambda|^2 ||\varphi_\alpha u||^2_{0,\mathbb{R}^n} \\ \leq C_0^2 \sum ||(A_\alpha - \lambda I)\varphi_\alpha u||^2_{0,\mathbb{R}^n} &\leq C_0^2 \sum ||\varphi_\alpha (A - \lambda I) u||^2_{0,\mathbb{R}^n} + \mathcal{T} \\ &= C_0^2 ||(A - \lambda I)u||^2_{0,\mathbb{R}^n} + \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\mathcal{T} = C_0^2 \sum \int |(A\varphi_\alpha - \varphi_\alpha A)u|^2 dx.$$

Здесь в каждом слагаемом на u действует дифференциальный оператор (18). Поэтому

$$\mathcal{T} \leq C_5 \int \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}(x)|^2 |D^\beta u|^2 dx.$$

Так как сумма квадратов коэффициентов ограничена, то

$$\mathcal{T} \leq C_6 ||u||^2_{m-1,\mathbb{R}^n}. \tag{28}$$

Полученный результат эквивалентен такому:

$$|\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_7 ||(A - \lambda I)u||_{0,\mathbb{R}^n} + C_8 ||u||_{m-1,\mathbb{R}^n}. \qquad (29)$$

Справа в последнем слагаемом применим интерполяционное неравенство. Из (24) и (29) получаем

$$||u||_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_9 ||(A - \lambda I)u||_{0,\mathbb{R}^n} + \varepsilon[||u||_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda| ||u||_{0,\mathbb{R}^n}]$$

при достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$. Считая, что здесь $\varepsilon < 1$, получаем нужную оценку. $\square$

Уточним теперь предположения о гладкости коэффициентов оператора A, достаточной для справедливости предложения 1 и теорем 1 и 2.

В предложении 1 достаточно, чтобы старшие коэффициенты были измеримы и почти постоянны, а остальные коэффициенты можно считать ограниченными измеримыми функциями. Действительно, нам нужна лишь оценка

$$||A_1 u||_{0,\mathbb{R}^n} \leq C ||u||_{m-1,\mathbb{R}^n}.$$

Она справедлива, если операторы умножения на коэффициенты в A_1 ограничены в $H^0(\mathbb{R}^n)$, что и позволяет предположить их ограниченными и измеримыми.

В теореме 1 о ДО на многообразии старшие коэффициенты в локальной записи оператора A естественно предположить непрерывными, остальные коэффициенты – опять ограниченными и измеримыми. При подсчете коммутаторов оператора A с умножением на функции из разбиения единицы надо дифференцировать эти функции, коэффициенты оператора A дифференцировать не приходится.

В теореме 2 о ДО на многообразии достаточны такие же предположения, но старшие коэффициенты надо считать равномерно непрерывными и равномерно ограниченными в $\mathbb{R}^n$.

Переходя к обобщениям с нормами порядка t и $t - m$, предположим для простоты, что t – натуральное число. Тогда предположения о гладкости всех коэффициентов надо поднять на $t-m$ единиц. Например, заведомо достаточно, чтобы все они принадлежали в случае $\mathbb{R}^n$ пространству функций, непрерывных и ограниченных с производными до порядка $t - m$ включительно.

Метод локализации хорош тем, что можно непосредственно проследить за достаточной гладкостью коэффициентов. При использовании исчисления (см. следующую лекцию) нужны специальные усилия, чтобы минимизировать предположения о гладкости. Но исчисление имеет другие преимущества, в частности, оно позволит исследовать структуру резольvenты.