Лекция 4

Мы кратко обсудим в этой лекции два варианта исчисления для ПДО с параметром. Первое изложено в книге М.А. Шубина (1978), второе – в книге Г. Грубб (1986 и 1996).

4. (..). Рассмотрим символы $a(x,\xi,\lambda)$, определенные на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, где Λ – замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале, принадлежащие C^∞ по (x,ξ) при каждом фиксированном λ, со следующими свойствами:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi,\lambda)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|+|\lambda|)^{m-|\beta|}. \tag{1}$$

Здесь m – любое фиксированное вещественное число. Параметр λ для простоты считаем имеющим вес 1 относительно ξ (или, что то же, относительно дифференцирования). Этот класс символов будем обозначать через $S_\Lambda^m = S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$. Класс соответствующих ПДО

$$A(\lambda)u(x) = a(x,D,\lambda)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi,\lambda)u(y)\,dy\,d\xi \tag{2}$$

будем обозначать через $\Psi_\Lambda^m = \Psi_\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$. Через S_Λ^∞ и $S_\Lambda^{-\infty}$ обозначим объединение и пересечение классов S_Λ^m, через Ψ_Λ^∞ и $\Psi_\Lambda^{-\infty}$ – объединение и пересечение соответствующих классов ПДО. Класс $\Psi_\Lambda^{-\infty}$ состоит из интегральных операторов

$$\int k(x,y,\lambda)u(y)\,dy \tag{3}$$

с бесконечно гладкими по (x,y) ядрами k, допускающими оценки

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y,\lambda)| \leq C_{\alpha,\beta,N}(1+|\lambda|)^{-N} \tag{4}$$

при любом натуральном N.

Чтобы сориентироваться, что охватывает исчисление, рассмотрим следующий пример. Нас в первую очередь интересует, резольвенты каких операторов (без параметра) мы сможем изучать.

. Пусть m – натуральное число и

$$A(\lambda) = a(x,D) - \lambda^m I. \tag{5}$$

Если $a(x,D)$ – дифференциальный оператор из $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, то при дифференцировании символа по x или ξ параметр исчезает. При m-кратном дифференцировании по ξ получается тождественный нуль. Поэтому оценка (1) выполнена для всех α, β.

Если же $a(x,D)$ – ПДО, то производные от символа порядка выше m по ξ – уже, вообще говоря, не нули, и они не убывают при $\lambda \to \infty$, так что эти операторы мы не сможем сейчас рассматривать. Но для эллиптических с параметром ДО их параметриксы, как мы увидим, окажутся охваченными исчислением. Чтобы пояснить это, рассмотрим символ

$$b(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{a_0(x,\xi) - \lambda^m}, \tag{6}$$

где $a_0(x,\xi)$ – однородный многочлен по ξ степени m, в предположении эллиптичности $a_0-\lambda$ с параметром в Λ. Как легко видеть, этот символ принадлежит S_Λ^{-m}. Все дело в том, что при дифференцировании по ξ степени разности $a_0-\lambda$ в знаменателе или не меняются, или увеличиваются.

Впрочем, символы типа
$$(1+|\xi|^2+|\lambda|^2)^\gamma \tag{7}$$
с нецелым γ тоже попадают в исчисление.

В книге М.А. Шубина "Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория" общность немного больше, чем у нас, но только что отмеченные обстоятельства остаются в силе.

Основные факты исчисления состоят в следующем.

Сначала надо определить смысл *асимптотического разложения* символа:

$$a(x,\xi,\lambda) \sim \sum_0^\infty a_j(x,\xi,\lambda), \tag{8}$$

где $a \in S_\Lambda^m$ и $a_j \in S_\Lambda^{m-j}$. Он состоит в том, что

$$a - \sum_0^N a_j \in S_\Lambda^{m-N-1}. \tag{9}$$

По заданному асимптотическому разложению символ a строится с точностью до прибавления символа из $S_\Lambda^{-\infty}$.

Рассмотрим теперь *ПДО с амплитудой* $p(x,y,\xi,\lambda) \in S_\Lambda^m(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n)$ (определение формулируется очевидным образом). Доказывается, что *соответствующий ПДО*
$$(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}p(x,y,\xi,\lambda)u(y)\,dy\,d\xi \tag{10}$$
принадлежит S_Λ^m *и имеет символ* $a(x,\xi,\lambda)$ *с асимптотическим разложением*

$$a(x,\xi,\lambda) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha p(x,y,\xi,\lambda)\big|_{y=x}. \tag{11}$$

Мы не приводим доказательства, аналогичные проведенным в случае отсутствия параметра; полезно провести их самостоятельно.

На основе только что сформулированной теоремы доказываются *теоремы о транспонированном и сопряженном операторе и о композиции ПДО с параметром.*

Теорема об ограниченности состоит в следующем: если $A(\lambda) \in \Psi_\Lambda^m$, то

$$|||A(\lambda)u|||_{t-m,\mathbb{R}^n} \le C_t |||u|||_{t,\mathbb{R}^n} \quad (\lambda \in \Lambda). \tag{12}$$

Здесь норма $|||u|||_{t,\mathbb{R}^n}$ при любом вещественном t определяется равенством

$$|||u|||_{t,\mathbb{R}^n}^2 = \int (1+|\xi|^2+|\lambda|^2)^t |Fu(\xi)|^2 d\xi. \tag{13}$$

Далее вводим *полиоднородные ПДО, зависящие от параметра.* Соответствующий класс обозначаем $\Psi^m_{ph,\Lambda}$. Полный символ $a(x,\xi,\lambda)$ такого ПДО имеет асимптотическое разложение

$$a(x,\xi,\lambda) \approx \sum_0^\infty a_j(x,\xi,\lambda), \tag{14}$$

где функции $a_j(x,\xi,\lambda)$ положительно однородны по (ξ,λ) степени $m-j$. *Главный символ* $a_0(x,\xi,\lambda)$ теперь содержит параметр. Разложение понимается в следующем смысле:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x,\xi,\lambda) - \sum_{j=0}^N a_j(x,\xi,\lambda)\right]\right| \leq C_{\alpha,\beta,N}(|\xi|+|\lambda|)^{m-|\beta|-N-1} \quad (|\xi|+|\lambda| \geq C_0 > 0) \tag{15}$$

при $\lambda \in \Lambda$ и любых N, α, β. Если перемножаются полиоднородные ПДО, то, в частности, главный символ произведения равен произведению главных символов.

Эллиптичность с параметром в угле Λ скалярного ПДО $A(\lambda)$ определяется как справедливость неравенства

$$|a_0(x,\xi,\lambda)| \geq C(|\xi|+|\lambda|)^m \quad (|\xi|+|\lambda| \neq 0, \ \lambda \in \Lambda). \tag{16}$$

В матричном случае пишется соответствующее неравенство для определителя с учетом размеров матрицы. Важнейший результат состоит в том, что для эллиптического с параметром в Λ ПДО $A(\lambda) \in \Psi^m_{pl,\Lambda}$ с главным символом a_0 строится параметрикс – такой ПДО $B(\lambda) \in \Psi^{-m}_{ph,\Lambda}$ с главным символом a_0^{-1} , что

$$A(\lambda)B(\lambda) = I + T_1(\lambda) \ \text{ и } \ B(\lambda)A(\lambda) = I + T_2(\lambda), \tag{17}$$

где $T_j(\lambda) \in \Psi^{-\infty}_\Lambda$. В частности,

$$|||T_j(\lambda)u|||_{t,\mathbb{R}^n} \leq C_{N,t}(1+|\lambda|)^{-N}|||u|||_{t,\mathbb{R}^n},$$

так что операторы $I + T_j(\lambda)$ обратимы при достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$ как операторы в соболевских пространствах $H^t(\mathbb{R}^n)$, по крайней мере, если считать ограниченным промежуток изменения индекса t. Отсюда следует, что эллиптический с параметром в Λ ПДО $A(\lambda) \in \Psi^m_{ph,\Lambda}$ имеет двусторонний обратный $A^{-1}(\lambda) \in \Psi^{-m}_{ph,\Lambda}$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$. В частности, справедлива (двусторонняя) априорная оценка.

Далее делаем переход к компактному многообразию M. Определяем классы ПДО $\Psi^m_\Lambda(M)$ и $\Psi^m_{ph,\Lambda}(M)$. Главный символ $a_0(x,\xi,\lambda)$ ПДО $A(\lambda) \in \Psi^m_{ph,\Lambda}(M)$ – функция на $T^*M \times \Lambda$. Получаем, в частности, теорему о композиции. Главный символ произведения двух полиоднородных ПДО равен произведению главных символов. Доказываем теорему об ограниченности в нормах $|||u|||_{t,M}$. Определяем эллиптичность с параметром полиоднородного ПДО $A(\lambda)$ в угле Λ, строим для него сначала параметрикс, а затем двусторонний обратный $A^{-1}(\lambda)$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$.

5. (G. Grubb). Положим

$$\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}, \quad \langle\xi,\lambda\rangle = (1+|\xi|^2+\lambda^2)^{1/2} \tag{1}$$

(можно было сделать это раньше). Пусть параметр λ изменяется для простоты на замкнутом луче $\mathbb{R}_+$ (вместо угла) и имеет вес 1 относительно ξ. Грубб рассматривает символы класса $S^{m,\nu}$, где m называется *порядком*, а ν *регулярностью.* (Будем придерживаться ее обозначений.) Оба эти числа не обязательно целые. Символы этого класса состоят из бесконечно гладких функций $a(x,\xi,\lambda)$ на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)| \le C_{\alpha,\beta,j}(\langle\xi\rangle^{\nu-|\beta|}+\langle\xi,\lambda\rangle^{\nu-|\beta|})\langle\xi,\lambda\rangle^{m-\nu-j}. \tag{2}$$

Если порядок дифференцирования $|\beta|$ по ξ не выше регулярности, то главный член в круглых скобках есть $\langle\xi,\lambda\rangle^{\nu-|\beta|}$, первое слагаемое можно отбросить, удвоив константу, и получается привычная нам оценка

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)| \le 2C_{\alpha,\beta,j}\langle\xi,\lambda\rangle^{m-|\beta|-j}, \tag{3}$$

в которой к тому же учитывается дифференцирование по λ. Если же $|\beta|>\nu$, то главным членом в круглых скобках становится $\langle\xi\rangle^{\nu-|\beta|}$ и оценка принимает вид

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)| \le 2C_{\alpha,\beta,j}\langle\xi\rangle^{\nu-|\beta|}\langle\xi,\lambda\rangle^{m-\nu-j}. \tag{4}$$

При фиксированном λ такой символ принадлежит S^m.

Соответствующий класс ПДО обозначим через $\Psi^{m,\nu}$.

Случай $\nu=\infty$ фактически рассмотрен у Шубина без предположений относительно дифференцируемости и производных символа по λ. Предположения Грубб в отношении производных по параметру выделяют ПДО с "хорошей" зависимостью от параметра.

Если $a(x,\xi,\lambda)\in S^{m,\nu}$, то $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)\in S^{m-|\beta|,\nu-|\beta|-j}$.

Класс $S^{-\infty,\nu-\infty}$ определяется как пересечение всех классов $S^{-N,\nu-N}$ с натуральными N. Символы этого класса удовлетворяют неравенствам

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)| \le C_{\alpha,\beta,j,N}\langle\xi\rangle^{-N}(1+\lambda)^{-\nu-j}. \tag{5}$$

Это интегральные операторы

$$\int k(x,y,\lambda)u(y)\,dy \tag{6}$$

с бесконечно гладкими ядрами, удовлетворяющими неравенствам

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j k(x,y,\lambda)| \le C'_{\alpha,\beta,j,N}(1+|x-y|)^{-N}(1+\lambda)^{-\nu-j}. \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что убывание при $\lambda\to\infty$ и $j=0$ имеет здесь место только при $\nu>0$.

Если $a\in S^{m,\nu}$ и $a_l\in S^{m-l,\nu-l}$ $(l=0,1,\ldots)$, то *асимптотическое разложение*

$$a(x,\xi,\lambda)\sim\sum_{l=0}^\infty a_l(x,\xi,\lambda) \tag{8}$$

означает, что

$$a-\sum_{j=0}^{M}a_l\in S^{m-M-1,\nu-M-1} \tag{9}$$

при любом M. По заданным $a_l\in S^{m-l,\nu-l}$ строится символ $a\in S^{m,\nu}$ с таким разложением. Два таких символа с одним и тем же разложением различаются на символ из $S^{-\infty,\nu-\infty}$.

Далее выделяется подкласс $\Psi_{ph}^{m,\nu}$ полиоднородных ПДО, в которых символы $a_l(x,\xi,\lambda)$ однородны по (ξ,λ) степени $m-l$ при $|\xi|\geq 1$.

Если $a(x,\xi)$ – символ ДО порядка m (с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$), то $a(x,\xi)-\lambda^m\in S_{ph}^{m,+\infty}$. Если же $a(x,\xi)$ – символ ПДО из S_{ph}^m, то $a(x,\xi)-\lambda^m\in S_{ph}^{m,m}$.

Если оператор задан при помощи амплитуды из $S_{ph}^{m,\nu}$, то это ПДО из $\Psi_{ph}^{m,\nu}$ с обычным разложением символа, см. формулы (10) и (11) в предыдущем пункте.

Справедливы теоремы о сопряженном операторе и о композиции. При этом если $A(\lambda)\in S_{ph}^{m_1,\nu_1}$ и $B(\lambda)\in S_{ph}^{m_2,\nu_2}$, то $C(\lambda)=A(\lambda)B(\lambda)\in S^{m_1+m_2,\nu(\nu_1,\nu_2)}$, где $\nu(\nu_1,\nu_2)=\min(\nu_1,\nu_2,\nu_1+\nu_2)$.

Эллиптичность с параметром ПДО $A(\lambda)\in\Psi_{ph}^{m,\nu}$ определяется как обычно. В этом случае при $\nu\geq 0$ для ПДО $A(\lambda)$ строится параметрикс $B(\lambda)\in\Psi^{-m,\nu}$. Имеют место соотношения

$$A(\lambda)B(\lambda)=I+T_1(\lambda),\quad B(\lambda)A(\lambda)=I+T_2(\lambda), \tag{10}$$

где $T_j(\lambda)\in\Psi^{-\infty,\nu-\infty}$. Асимптотическое разложение символа оператора $B(\lambda)$ строится по асимптотическому разложению символа ПДО $A(\lambda)$.

Как следствие для ПДО $A(\lambda)\in S^{m,\nu}$ с *положительным* ν выводится его обратимость как оператора из $H^t(\mathbb{R}^n)$ в $H^{t-m}(\mathbb{R}^n)$ при больших λ с априорной оценкой

$$|||u|||_{t,\mathbb{R}^n}\leq C|||A(\lambda)u|||_{t-m,\mathbb{R}^n}. \tag{11}$$

Все определения и (загрубленные) результаты переносятся на ПДО на замкнутом многообразии, включая обратимость эллиптического с параметром оператора с $\nu>0$ при больших значениях параметра.