Лекция 5

3. Функции от операторов

В следующем разделе при некоторых предположениях будут рассмотрены следующие функции от эллиптического ПДО A: резольвента $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, степень A^z,"параболическая" экспонента e^{-tA}. При определенных условиях это интегральные операторы, ядра которых обладают богатейшими свойствами. В частности, изучение этих ядер позволяет вывести асимптотическую формулу для собственных значений оператора A при помощи тауберовых теорем. Но выявляется также масса инвариантов, связанных с оператором и теоретически вычислимых через локальный полный символ (практически вычислимы только первые инварианты): коэффициенты в асимптотических разложениях ядра резольвенты и ядра экспоненты, полюсы "дзета-функции" и вычеты в них. Кратко будет затронута также "гиперболическая" экспонента e^{itA}.

Но сначала мы должны рассмотреть функции от абстрактных операторов.

1. . Пусть A – неограниченный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения. (Можно рассматривать и банахово пространство.) Он называется *позитивным*, если его резольвентное множество $\rho(A)$ содержит замкнутую отрицательную полуось $\overline{\mathbb{R}}_-$ и в ее точках резольвента $R_A(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$||R_A(\lambda)|| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{1}$$

с не зависящей от λ постоянной C. Возможно, это определение Красносельского–Соболевского (1959).

Мы будем пользоваться следующими вариантами этого определения. Пусть Λ – замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. Будет удобно сразу считать $\mathbb{R}_-$ его биссектрисой. Скажем, что оператор A Λ-*позитивен*, если $\rho(A) \supset \Lambda$ и в Λ выполнено неравенство (1). Скажем, что оператор A Λ-*позитивен в ослабленной форме*, если есть такое $\lambda_0 > 0$, что резольвентное множество содержит точки угла Λ с $|\lambda| \geq \lambda_0$ и там выполнено неравенство (1). Если Λ имеет раствор 2φ, то будем писать $\Lambda = \Lambda(\varphi)$.

Так как резольвентное множество всегда открыто, то в случае Λ-позитивности оно содержит некоторую окрестность O_ε начала координат, в которой, конечно, сохраняется оценка вида (1). Кроме того, легко проверяется, что из Λ-позитивности следует Λ_1-позитивность, где Λ_1 – угол немного большего раствора. Проверьте это самостоятельно, используя формулу вида

$$R(\lambda + \Delta\lambda) = R(\lambda)[I - \Delta\lambda R(\lambda)]^{-1}. \tag{2}$$

(Множество выходящих из начала лучей, вдоль которых выполнены оценки вида (1), открыто.) Отметим также, что, имея угол с биссектрисой, идущей вдоль $\mathbb{R}_-$, в котором выполнена оценка вида (1), его всегда можно расширить небольшим сдвигом вправо.

Если оператор A Λ-позитивен в ослабленной форме, то оператор $A + cI$ Λ-позитивен при достаточно большом $c > 0$. Прибавление постоянной c не мешает при рассмотрении, например, поведения собственных значений: весь спектр сдвигается на c вправо.

Ближайшая аналогия в теории эллиптических ПДО – ПДО положительного порядка, эллиптические с параметром в Λ. Они Λ-позитивны в ослабленной форме. Это чрезвычайно важное обстоятельство в теории эллиптических операторов.

Если оператор A – самосопряженный и полуограниченный снизу, то он $\Lambda(\varphi)$-позитивен в ослабленной форме при любом $\varphi < \pi$. Это следует из того, что норма резольвенты в этом случае равна $1/d(\lambda)$, где $d(\lambda)$ – расстояние от точки λ до спектра этого оператора.

Действительно, если $\{e_j\}_1^\infty$ – ортонормированный базис из собственных векторов такого оператора и λ_j – соответствующие собственные значения, то в точках резольвентного множества

$$R_A(\lambda)f = \sum(\lambda - \lambda_j)^{-1}(f, e_j)e_j \tag{3}$$

и в силу равенства Парсеваля

$$\|R_A(\lambda)f\|^2 = \sum |\lambda - \lambda_j|^{-2}|(f, e_j)|^2 \le \sup|\lambda - \lambda_j|^{-2}\|f\|^2. \tag{4}$$

Если оператор самосопряженный, но не полуограниченный, то позитивности можно добиться его умножением на $e^{i\theta}$. Он перестанет быть самосопряженным, но останется нормальным.

. Известно, что резольвента не может убывать на бесконечности быстрее $|\lambda|^{-1}$. Это вытекает из следующего утверждения. Имеются в виду замкнутые неограниченные операторы с плотной областью определения.

1. (Агмон, 1965.) *Пусть* $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ *– такая последовательность точек в* $\rho(A)$, *что*

$$|\lambda_n| \to \infty \ \text{ и } \ \|R_A(\lambda_n)\| \le C_1|\lambda_n|^{-1}. \tag{5}$$

Тогда $C_1 \ge 1$.

. Допустим, что $C_1 < 1$. Положим

$$\varepsilon = (C_1^{-1} - 1)/2. \tag{6}$$

Тогда

$$C_1 = \frac{1}{1 + 2\varepsilon}, \tag{7}$$

и если

$$\lambda = \lambda_n + \Delta\lambda, \ \text{ где} |\Delta\lambda| \le (1 + \varepsilon)|\lambda_n|, \tag{8}$$

то

$$|\Delta\lambda|\|R_A(\lambda_n)\| < \frac{1 + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} < 1 \tag{9}$$

и существует

$$R_A(\lambda) = (I - \Delta\lambda R_A(\lambda_n))^{-1}R_A(\lambda_n), \tag{10}$$

причем
$$\|R_A(\lambda)\| \le \frac{1}{1-\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}}\frac{1}{1+2\varepsilon}\frac{1}{|\lambda_n|} = \frac{1}{\varepsilon|\lambda_n|}. \tag{11}$$

В частности, это неравенство выполнено при
$$|\lambda| < (1+\varepsilon)|\lambda_n| - |\lambda_n| = \varepsilon|\lambda_n|. \tag{12}$$

Отсюда и из (11) при $n \to \infty$ получаем, что резольвента $R_A(\lambda)$ существует и равна 0 при всех λ, что, конечно, невозможно. Значит, $C_1 \ge 1$. $\square$

2. . Пусть $0 < \psi < \pi$ и δ – вещественное число. Через $\Gamma = \Gamma(\delta, \psi)$ обозначим контур на комплексной плоскости, состоящий из двух лучей $\{\lambda : \arg(\lambda - \delta) = \pm\psi\}$ с обходом снизу из бесконечности в точку δ и далее в бесконечность вверх. Этот контур делит дополнительную к нему часть плоскости на секторы левее контура и правее его.

Нам понадобятся три контура $\Gamma(\delta_0, \psi)$, $\Gamma(\delta, \psi)$ и $\Gamma(\delta_1, \psi)$ с $\delta_0 < \delta < \delta_1$. Они получаются друг из друга сдвигом вдоль вещественной оси.

Пусть $\Phi(\lambda)$ – функция, голоморфная правее контура $\Gamma(\delta_0, \psi)$ $(0 < \psi < \pi)$ и удовлетворяющая там неравенству
$$|\Phi(\lambda)| \le C_1(1+|\lambda|)^{-h} \tag{13}$$

с положительным h. При $\delta_0 < \delta$ в точках сектора правее контура $\Gamma(\psi, \delta)$ справедлива формула Коши вида
$$\Phi(\mu) = (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda)(\mu-\lambda)^{-1}d\lambda, \tag{14}$$

так как этот контур можно заменить окружностью с центром в μ.

По этому образцу определяется функция $\Phi(A)$ от позитивного оператора. Пусть $\delta < \delta_1$ и сектор левее контура $\Gamma(\delta_1, \psi)$ содержится в резольвентном множестве этого оператора, и пусть в нем выполнено неравенство (1). *Полагаем*
$$\Phi(A) = (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda)R_A(\lambda)\, d\lambda \tag{15}$$

Так как $\delta_0 < \delta < \delta_1$, то на контуре интегрирования действуют обе оценки (1) и (13). Поэтому интеграл сходится. Подробнее: интеграл понимается как предел интеграла по конечному контуру в смысле нормы в H, а интеграл по конечному контуру – как предел соответствующих интегральных сумм тоже по норме в H.

Если A – оператор с компактной резольвентой, то $\Phi(A)$ – компактный оператор, так как интегральные суммы компактны, а предел последовательности компактных операторов компактен. В общем же случае оператор $\Phi(A)$ ограничен: его норма легко оценивается с использованием неравенств (1) и (13) (посмотрите сами).

Пусть теперь A – нормальный (например, самосопряженный) оператор с компактной резольвентой и ортонормированным базисом $\{e_j\}_1^\infty$ из собственных векторов, и пусть λ_j – соответствующие им собственные значения. Тогда возможен другой подход к определению функции $\Phi(A)$. Функцию $\Phi(\lambda)$ при этом достаточно считать определенной во всех точках λ_j. *Полагаем*

$$\Phi(A)f = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\lambda_j)(f, e_j)e_j. \tag{16}$$

Этот оператор ограничен, если $\{\Phi(\lambda_j)\}$ – ограниченная последовательность, и компактен, если она стремится к нулю (так как тогда это предел по операторной норме конечномерных операторов – частных сумм ряда). Если же $\{\Phi(\lambda_j)\}$ – неограниченная последовательность, то область определения оператора $\Phi(A)$ выделяется условием

$$\|\Phi(A)f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\Phi(\lambda_j)|^2 |(f, e_j)|^2 < \infty. \tag{17}$$

Оператор $\Phi(A)$ нормален, так как имеет ортонормированный базис $\{e_j\}$ из собственных векторов, и является самосопряженным, если все $\Phi(\lambda_j)$ – вещественные числа.

Проверим согласованность определений (15) и (16), например, в следующей ситуации. Пусть функция $\Phi(\lambda)$ голоморфна и удовлетворяет условию (13) при $|\arg\lambda| \le \alpha$, и пусть A – самосопряженный оператор с дискретным спектром $\{\lambda_j\}$, лежащим внутри этого угла, и ортонормированным базисом из (соответствующих λ_j) собственных векторов e_j. Тогда

$$(A - \lambda I)^{-1} e_j = (\lambda_j - \lambda)^{-1} e_j,$$

поэтому из формулы (15) следует, что

$$\Phi(A)e_j = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(0,\alpha)} \Phi(\lambda)(\lambda_j - \lambda)^{-1} d\lambda\, e_j = \Phi(\lambda_j)e_j,$$

а отсюда следует (16).

В отличие от (16) формула (15), как уже отмечалось, непосредственно не применима к определению неограниченных операторов $\Phi(A)$.

В следующем предложении мы рассматриваем операторы, определенные при помощи функций $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ и $\Phi_3(\lambda) = \Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda)$.

2. *Пусть операторы* $\Phi_1(A)$, $\Phi_2(A)$ *и* $\Phi_3(A)$ *определены формулой вида* (15) *для простоты с одним и тем же контуром* $\Gamma_{\delta,\psi}$. *Тогда*

$$\Phi_1(A)\Phi_2(A) = \Phi_3(A). \tag{18}$$

. Мы воспользуемся *тождеством Гильберта* для резольвенты $R = R_A$:

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu). \tag{19}$$

Для его проверки следует умножить разность $(A - \mu I) - (A - \lambda I)$ на произведение резольвент.

Пусть оператор $\Phi_1(A)$ задан формулой (15) с контуром $\Gamma = \Gamma(\delta, \psi)$, а оператор $\Phi_2(A)$ – аналогичной формулой с контуром $\Gamma' = \Gamma(\delta', \psi)$, где δ' чуть больше, чем δ. Тогда

$$\Phi_1(A)\Phi_2(A) = (2\pi i)^{-2}\int_\Gamma \Phi_1(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda \int_{\Gamma'} \Phi_2(\mu)\frac{d\mu}{\lambda-\mu} + (2\pi i)^{-2}\int_{\Gamma'} \Phi_2(\mu)R(\mu)\,d\mu \int_\Gamma \Phi_1(\lambda)\frac{d\lambda}{\mu-\lambda} = \Phi_3(A),$$

так как

$$\int_{\Gamma'} \Phi_2(\mu)\frac{d\mu}{\lambda-\mu} = 0 \ \ (\lambda\in\Gamma), \quad (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \Phi_1(\lambda)\frac{d\lambda}{\mu-\lambda} = \Phi_1(\mu) \ \ (\mu\in\Gamma'). \quad \square$$

Кроме произведений $\Phi_1(A)\Phi_2(A)$, нам понадобятся некоторые суперпозиции $\Phi_1(\Phi_2(A))$, но их проще будет рассматривать в конкретных случаях.

3. . Пусть оператор A $\Lambda(\varphi)$-позитивен и $\Gamma = \Gamma(\delta, \psi)$, где $\pi - \varphi < \psi < \pi$ и δ – настолько малое число, что этот контур лежит в $\rho(A)$. При $\operatorname{Re} z < 0$ *полагаем*

$$A^z = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \lambda^z R_A(\lambda)\,d\lambda, \tag{20}$$

где

$$\lambda^z = \exp[z(\ln|\lambda| + i\arg\lambda)], \quad -\pi < \arg\lambda \le \pi. \tag{21}$$

Это, конечно, частный случай определения (15). Из предложения 2 вытекает

3. *При* $\operatorname{Re} z_1 < 0$, $\operatorname{Re} z_2 < 0$

$$A^{z_1}A^{z_2} = A^{z_1+z_2} = A^{z_2}A^{z_1}. \tag{22}$$

. Забегая вперед (для ориентировки), отметим, что если A – (эллиптический с параметром вдоль $\mathbb{R}_-$) ПДО порядка $m > 0$ с главным символом $a_0(x,\xi)$, то A^z – ПДО порядка $m|\operatorname{Re} z|$ с главным символом $a_0(x,\xi)^z$ (Seeley, 1967). Но мы просмотрим абстрактную ситуацию, так как часто степени оператора нужны в других обстоятельствах. Например, это могут быть степени оператора, отвечающего эллиптической граничной задаче.

В литературе есть другие варианты подхода к степеням оператора.

Мы предположили, что 0 содержится в резольвентном множестве оператора A; это облегчает рассмотрения.

Путь интегрирования в (20) можно преобразовать в контур, составленный из идущих вдоль $\mathbb{R}_-$ лучей $|\{\lambda : |\lambda| \ge \delta, \arg\lambda = \pm\pi\}$ и соединяющей их концы окружности $\{\lambda : |\lambda| = \delta, |\arg\lambda| \le \pi\}$ с направлением обхода против часовой стрелки. Этот контур обозначим через Γ_δ.

Если $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, то в интеграле по Γ_δ вместо Γ можно перейти к пределу при $\delta \to 0$ (несобственный интеграл в нуле сходится) и после замены $|\lambda| = t$ получить представление

$$A^z = -\frac{\sin z\pi}{\pi}\int_0^\infty t^z R_A(-t)dt \quad (-1 < \operatorname{Re} z < 0), \tag{23}$$

так как $\sin \pi z = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})/2i$.

Если $z = -k$, где $k \in \mathbb{N}$, то интегралы по входящим в Γ_δ лучам сокращаются и формула принимает вид

$$A^{-k} = (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=\delta} \lambda^{-k} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{24}$$

4. *При любом натуральном k оператор* (24) *является обратным к* A^k.

Действительно, в силу (22) это достаточно проверить для $k = 1$. В этом случае

$$A \int_{|z|=\delta} \lambda^{-1} R(\lambda)\, d\lambda = \int_{|z|=\delta} \lambda^{-1} d\lambda\; I + \int_{|z|=\delta} R(\lambda)\, d\lambda = 2\pi i I,$$

так как последний интеграл равен нулю. Аналогично проверяется, что на области определения $D(A)$ оператора A

$$\int_{|z|=\delta} \lambda^{-1} R(\lambda)\, d\lambda \cdot A = 2\pi i I. \quad \square$$