Лекция 6

Мы сначала приведем для удобства несколько формул из лекции 5. Первая – это определение оператора $\Phi(A)$ в случае позитивного оператора A:

$$\Phi(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{15}$$

Вторая – определение оператора $\Phi(A)$ в случае нормального оператора A с дискретным спектром:

$$\Phi(A)f = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\lambda_j)(f, e_j)e_j. \tag{16}$$

Третья – формула для $\Phi_3(A)$, где $\Phi_3(\lambda) = \Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda)$:

$$\Phi_3(A) = \Phi_1(A)\Phi_2(A). \tag{18}$$

Четвертая – тождество Гильберта:

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu). \tag{19}$$

Пятая – определение A^z при $\mathrm{Re}\, z < 0$:

$$A^z = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \lambda^z R_A(\lambda)\, d\lambda, \tag{20}$$

Шестая – формула (18) для степеней с отрицательными действительными частями показателей:

$$A^{z_1}A^{z_2} = A^{z_1+z_2} = A^{z_2}A^{z_1}. \tag{22}$$

Теперь мы хотим распространить определение A^z на все комплексные z.

Заметим, что при любом z с $\mathrm{Re}\, z < 0$ оператор A^z аннулирует только нулевой вектор, так как это верно для A^{-n} и $A^{-n} = A^{-n-z}A^z$ при $-n < \mathrm{Re}\, z < 0$.

Используя это обстоятельство, при $\mathrm{Re}\, z > 0$ *полагаем*[1]

$$A^z = (A^{-z})^{-1}. \tag{25}$$

Это неограниченный, но замкнутый оператор, так как он имеет ограниченный обратный. (Если A – оператор с ограниченным обратным A^{-1}, то из $u_n \to u$, $Au_n \to f$ следует, что $u_n \to A^{-1}f$, $u = A^{-1}f$, $Au = f$. Или так: замкнутость оператора – это замкнутость его графика, а ограниченный оператор, конечно, замкнут.)

Далее приходится проверять серию мелких предложений, и мы приведем их без подробных доказательств. В случае эллиптических ПДО все это понять проще.

При $\mathrm{Re}\, z < 0$ область значений $\mathrm{Im}\, A^z$ оператора A^z плотна в H и сужается с уменьшением $\mathrm{Re}\, z$.

[1] (25) .. , .. , .. , .. С " ", , ., 1966. , , . . . , .

Действительно, сужение области значений сразу следует из (22). Из (22) также следует, что плотность достаточно проверить при натуральных $z = n$. Это делается индукцией по n (при $n = 1$ она следует из предположения о плотности $D(A)$ в H).

Отсюда вытекает, что при $\operatorname{Re} z > 0$ область определения $D(A^z)$ оператора A^z плотна в H и сужается с ростом $\operatorname{Re} z$.

Равенства (22) остаются справедливыми: при $\operatorname{Re} z_1 < 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$, $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) \neq 0$ на $D(A^{z_2})$; при $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$ на $D(A^{z_1+z_2})$.

При $0 < \operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$ оператор A^{z_1} является замыканием своего сужения на $D(A^{z_2})$. Действительно, A^{z_1} замкнут, а $D(A^{z_2})$ плотна в H и тем более в $D(A^{z_1})$.

При $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_1$, $\operatorname{Re} z \neq 0$, $\operatorname{Re} z_1 \neq 0$ оператор A^z является замыканием оператора

$$A^{z_1} A^{z-z_1} = A^{z-z_1} A^{z_1} \tag{26}$$

с областью определения $D(A^{z_1})$ (проверьте сами).

Пусть теперь $0 = \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_1$. *Определяем* A^z как замыкание оператора (26) с областью определения $D(A^{z_1})$. Проверяется корректность этого определения (независимость от выбора z_1).

При $\operatorname{Re} z = 0$ оператор A^z тоже замкнут и его область определения плотна в H. (Но утверждать, что он ограничен, в общем случае нельзя.) Оператор A^0 очевидным образом совпадает с I.

Соотношение (22) справедливо на $D(A^{z_3})$, если

$$\operatorname{Re} z_3 > \max\{\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Re}(z_1 + z_2)\}. \tag{27}$$

Справедлива формула

$$(A^z)^* = (A^*)^{\overline{z}}. \tag{28}$$

Для $\operatorname{Re} z < 0$ она следует из определения (20) с учетом того, что

$$\rho(A^*) = \{\lambda : \overline{\lambda} \in \rho(A)\} \ \text{ и } \ R_A(\lambda)^* = R_{A^*}(\overline{\lambda}).$$

Для нормального оператора с дискретным спектром, лежащим в угле $\{\lambda : |\arg \lambda| < \varphi < \pi\}$, данные выше определения степени при всех z принимают вид

$$A^z f = \sum_j^\infty \lambda_j^z (f, e_j) e_j \tag{29}$$

в тех же обозначениях, что и в (16) .

Пусть при этом для простоты λ_j вещественны, т.е. оператор самосопряженный. При $\operatorname{Re} z > 0$ область определения оператора A^z выделяется тогда условием

$$\sum_{j=0}^\infty |\lambda_j|^{2 \operatorname{Re} z} |(f, e_j)|^2 < \infty. \tag{30}$$

Она не зависит от $\operatorname{Im} z$. При чисто мнимых z это ограниченные операторы.

5. *При* $\operatorname{Re} z < 0$ *оператор* A^z *является голоморфной функцией от* z *со значениями в пространстве ограниченных операторов в* H. *При* $\operatorname{Re} z < h$, *где* $h > 0$, *и любом* $f \in D(A^{z_1})$, *где* $\operatorname{Re} z_1 = h$, $A^z f$ *– голоморфная функция от* z *со значениями в* H.

. Первое утверждение вытекает из определения (20). Действительно, интеграл абсолютно (т.е. по норме) и равномерно сходится в окрестности фиксированной точки z и допускает дифференцирование под знаком интеграла. Чтобы проверить второе утверждение, достаточно заметить, что $A^z f = A^{z-z_1} g$, где $g = A^{z_1} f$ и $\operatorname{Re}(z - z_1) < 0$. $\square$

Отметим еще, что угол позитивности расширяется при переходе от A к A^s с малым $s > 0$. Подробно останавливаться на этом не будем. Проверяется, что резольвента оператора A^s выражается формулой типа (15):

$$R_{A^s}(\mu) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} (\lambda^s - \mu)^{-1} R_A(\lambda) d\lambda. \tag{31}$$

Ясно, что при $0 < s < 1$ она определена в более широком угле, чем $R_A(\lambda)$.

4. e^{-tA}. Пусть оператор A $\Lambda(\pi/2)$-позитивен в ослабленной форме. Мы знаем, что угол позитивности можно немного расширить. *Полагаем* при $t > 0$

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma e^{-t\lambda} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{32}$$

Здесь $\Gamma = \Gamma(\delta, \varphi)$, где φ чуть меньше $\pi/2$, а δ выбирается так, что весь спектр оператора лежит правее контура. Считаем, что на контуре выполнена оценка из определения позитивности, т.е. норма резольвенты $R_A(\lambda)$ убывает как $|\lambda|^{-1}$. Функция $e^{-t\lambda}$ является, конечно, целой аналитической функцией от λ, и на контуре ее модуль экспоненциально убывает. Это новый частный случай формулы (15).

Оператор e^{-tA} всегда ограничен при любом $t > 0$. Если резольвента $R_A(\lambda)$ компактна, то оператор e^{-tA} компактен.

Заметим, что функцию e^{-tA} можно, используя формулу (32), голоморфно продолжить по t в некоторую угловую окрестность луча $\mathbb{R}_+$: там можно дифференцировать по t под знаком интеграла. При этом, так как

$$-\lambda R_A(\lambda) = (A - \lambda I) R_A(\lambda) - A R_A(\lambda) = I - A R(\lambda)$$

(и это ограниченный оператор), то

$$(e^{-tA})' = -A e^{-tA}. \tag{33}$$

Для t_1, t_2 из этого угла в силу формулы (18)

$$e^{-t_1 A} e^{-t_2 A} = e^{-(t_1+t_2)A}. \tag{34}$$

В частности, формулы (33) и (34) верны при положительных t и t_j.

Остановимся на связи экспоненты с задачей Коши

$$u'(t) + Au(t) = 0 \quad (t > 0), \tag{35}$$
$$u(0) = u_0. \tag{36}$$

6. *При любом* $u_0 \in H$ *функция* $u(t) = e^{-tA}u_0$ *является решением задачи* (35), (36).

. Уравнение (35) удовлетворяется в силу (34). Немного сложнее проверяется начальное условие, так как убывание нормы резольвенты не обеспечивает сходимости интеграла (32) при $t = 0$.

Пусть сначала u_0 принадлежит области определения $D(A)$ оператора A. Тогда $u_0 \in D(A - \mu I)$, где в качестве μ возьмем точку из $\rho(A)$ на $\mathbb{R}_-$ левее δ. Имеем $u_0 = R(\mu)v$ при некотором $v \in H$. В силу тождества Гильберта (19),

$$R(\lambda)R(\mu)v = (\lambda - \mu)^{-1}[R(\lambda) - R(\mu)]v.$$

Интеграл

$$\int_\Gamma e^{-tA}(\lambda - \mu)^{-1}d\lambda$$

равен нулю. Поэтому

$$u(t) = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma e^{-t\lambda}R(\lambda)(\lambda - \mu)^{-1}d\lambda\, v.$$

Выигрыш состоит в том, что под знаком интеграла появился множитель $(\lambda - \mu)^{-1}$. При $t \to +0$ функция $u(t)$ стремится к

$$u(0) = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma R(\lambda)(\lambda - \mu)^{-1}d\lambda\, v. \tag{37}$$

Вычисляя этот интеграл через вычет подинтегрального выражения в точке μ, получаем, что $u(0) = R(\mu)v = u_0$. Точнее, используется следующий прием. Умножаем обе части равенства (37) скалярно на произвольный вектор w. Числовая функция $(R(\lambda)v, w)$ голоморфна и убывает как $|\lambda|$ на контуре и влево от него, и мы получаем, вычисляя соответствующий интеграл через вычет, что

$$(u(0), w) = (R(\mu)v, w) = (u_0, w).$$

Отсюда равенство $u(0) = u_0$ следует ввиду произвольности w.

Чтобы распространить результат на все $u_0 \in H$, достаточно проверить равномерную по t при малых $t > 0$ ограниченность оператора e^{-tA} (что позволит воспользоваться аппроксимацией произвольного u_0 элементами из $D(A)$). Для этого будем менять δ, $\delta \to -\infty$. Как мы увидим, надо будет взять $|\delta| = 1/t$. Пока предположим, что $\delta < 0$.

На Γ мы имеем грубую оценку $|\lambda| \geq |\delta|\sin\varphi$ и, значит,

$$(|\delta| + \eta)|\lambda|^{-1} \leq C_1,$$

где $\eta = |\operatorname{Im}\lambda|$ и $C_1 = (\sin\varphi)^{-1} + 1$. Поэтому на Γ

$$||R(\lambda)|| \leq C|\lambda|^{-1} \leq CC_1(|\delta| + \eta)^{-1}$$

и

$$||e^{-tA}|| \leq CC_1e^{-\delta t}\int_\Gamma |e^{-(\lambda-\delta)t}|(|\delta| + \eta)^{-1}|d\lambda| = C_2e^{-\delta t}\int_0^\infty e^{-C_3t\eta}(|\delta| + \eta)^{-1}d\eta, \tag{38}$$

где $C_2 = 2CC_1(\sin\varphi)^{-1}$ и $C_3 = (\sin\varphi)^{-1}$. Теперь полагаем $|\delta| = 1/t$ и $\eta = \widetilde{\eta}/t$, где $\widetilde{\eta}$ – новая переменная, по которой мы интегрируем. Правая часть в (38) оказывается не зависящей от t. $\square$

Уравнение (35) можно рассматривать как абстрактный аналог уравнения теплопроводности, а условие $\Lambda(\pi/2)$-позитивности оператора A в ослабленной форме называть *условием параболичности* этого уравнения. (Годится оператор $A = -\Delta$ на замкнутом многообразии.)

. Экспонента e^{-tA} не определена у нас при $t = 0$: как уже было сказано, убывание резольвенты не обеспечивает сходимости интеграла (32) при $t = 0$. Но мы положим $e^{-0A} = I$. Теперь экспонента определена на замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$. Она обладает полугрупповым свойством (34). При любом $t > 0$ и любом $w \in H$ функция $e^{-tA}w$ непрерывна в H (по норме в этом пространстве). В предложении 6 мы фактически доказали, что непрерывность сохраняется при $t = 0$. Это означает, что мы имеем *сильно непрерывную полугруппу*. А поскольку она голоморфно продолжается с сохранением полугруппового свойства (34) в некоторую угловую окрестность луча $\mathbb{R}_+$, это *голоморфная полугруппа*. Оператор A является *производящим оператором* этой полугруппы.

Если угол в условии позитивности мал, то может быть полезным переход к малой положительной степени A^s оператора A для расширения угла позитивности до $\pi/2$.

Если A – нормальный оператор с дискретным спектром, лежащим, скажем, в угле $\{\lambda : |\arg\lambda| \leq \varphi < \pi/2\}$, то в тех же обозначениях, что и в (16),

$$e^{-tA} = \sum_{1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}(f, e_j)e_j. \tag{40}$$