Лекция 7

Снова повторим нужные формулы:

$$\Phi(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{15}$$

Для $\operatorname{Re} z < 0$

$$A^z = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \lambda^z R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{20}$$

Для $t > 0$

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} e^{-t\lambda} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{32}$$

5. $R_A(\lambda)$, A^{-z} и e^{-tA}. В теории эллиптических ПДО каждая из этих функций в отдельности интенсивно изучалась в литературе. Формулы, которые мы здесь обсудим, в теории ПДО позволяют "пересчитывать" результаты, полученные для одной из этих функций от A, в результаты для других. Две формулы мы уже имеем: это определения степени и экспоненты через резольвенту.

Будем считать, что оператор A является $\Lambda(\varphi)$-позитивным при $\varphi < \varphi_0$ и что φ_0 здесь нельзя увеличить.

7. *При $0 < c < 1$ для точек μ внутри угла позитивности*

$$R_A(\mu) = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(-\mu)^{z-1}}{\sin \pi z} A^{-z}\, dz, \tag{40}$$

где $(-\mu)^{z-1}$ – голоморфная функция от (z,μ), совпадающая с $e^{(z-1)\ln|\mu|}$ при $\mu \in \mathbb{R}_-$.

Убедимся сначала в сходимости этого интеграла. Фиксируя μ в угле позитивности, возьмем контур $\Gamma = \Gamma(\delta,\psi)$, определяющий A^{-z} и такой, что точка μ лежит левее этого контура. Мы имеем

$$|(-\mu)^{z-1}| \le |\mu|^{c-1} \exp(|\arg(-\mu)| \cdot |\operatorname{Im} z|), \tag{41}$$

$$|(\sin \pi z)^{-1}| \le C_1 \exp(-\pi |\operatorname{Im} z|), \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \|A^{-z}\| &\le \int_\Gamma |\lambda^{-z}| \|R_A(\lambda)\| |d\lambda| \\ &\le C_2 \exp(\psi |\operatorname{Im} z|) \int_\Gamma |\lambda|^{-c} (1 + |\lambda|)^{-1} |d\lambda| = C_3 \exp(\psi |\operatorname{Im} z|), \end{aligned} \tag{43}$$

где C_j не зависят от z. Из этих оценок видна сходимость интеграла (40), так как $\arg(-\mu) + \psi < \pi$.

Объясним теперь, откуда взялась формула (40). Известно, что при $0 < t < 1$

$$(1+t)^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{t^{z-1}}{\sin \pi z} dz. \tag{44}$$

Эта формула проверяется следующим образом. Нужно сдвигать линию интегрирования параллельно себе вправо, перепрыгивая через нули синуса. Это можно делать, вычисляя интеграл по замкнутому контуру через вычеты в нулях синуса, так как в любой вертикальной полосе $\{z : 0 < c_0 \le \operatorname{Re} z \le c_1\}$ подинтегральное выражение быстро убывает по модулю при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ равномерно по $\operatorname{Re} z$ (так как модуль синуса растет экспоненциально, см. (42)). Поэтому правая часть в (43) при любом натуральном N равна

$$-\pi \sum_{l=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=l} \frac{t^{z-1}}{\sin \pi z} + \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c+N} \frac{t^{z-1}}{\sin \pi z}\, dz.$$

Здесь сумма с множителем $-\pi$ совпадает с $1-t+\cdots+(-1)^{N-1}t^{N-1}$, а интеграл не превосходит по модулю $C_4 t^{c+N-1}$ и потому стремится к нулю при $N \to \infty$.

Подставим теперь в (44) $t = -\mu/\lambda$, считая сначала, что числитель и знаменатель – положительные числа и дробь меньше 1. Получим

$$(\lambda - \mu)^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(-\mu)^{z-1} dz}{\lambda^z \sin \pi z} \quad (0 < c < 1). \tag{45}$$

Формула (40) формально получается отсюда подстановкой A вместо λ. Формула (45) сейчас понадобится нам с $\lambda \in \Gamma$ и произвольной точкой μ, лежащей левее контура γ. На эти значения λ и μ она распространяется аналитическим продолжением (при котором $\lambda \ne \mu$ и $\lambda,\ -\mu \notin \overline{\mathbb{R}}_-$) .

7. Запишем резольвенту в точке μ формулой Коши (это формула (31) из лекции 6 с $s = 1$)

$$R_A(\mu) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\lambda - \mu)^{-1} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{46}$$

Теперь подставим (45) в (46) и поменяем порядок интегрирования (это возможно ввиду абсолютной сходимости повторных интегралов):

$$R_A(\mu) = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(-\mu)^{z-1}}{\sin \pi z} (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^{-z} R_A(\lambda)\, d\lambda\, dz. \tag{47}$$

Остается воспользоваться формулой вида (20) для A^{-z}. $\square$

8. *Пусть* $\varphi_0 > \pi/2$. *Тогда при* $t > 0$, $c > 0$

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} t^{-z} \Gamma(z) A^{-z}\, dz. \tag{48}$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. С этой формулой мы разберемся по тому же плану, что и с (40).

Сначала проверим абсолютную сходимость интеграла справа. Считая, что оператор A^{-z} определен формулой вида (20) с ψ чуть меньше $\pi/2$, имеем согласно (43)

$$\|A^{-z}\| \le C_1 \exp(\psi |\operatorname{Im} z|),$$

и достаточно проверить, что

$$|\Gamma(z)| \le C_2 \exp(-\omega |\operatorname{Im} z|) \tag{49}$$

при любом $\omega \in (0, \pi/2)$, где $C_2 = C_2(\omega)$ не зависит от $\operatorname{Im} z$. В стандартной формуле для Γ-функции

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

сделаем замену $u = e^\sigma$. Получим, полагая $z = x + iy$,

$$\Gamma(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x - e^\sigma} e^{i\sigma y} d\sigma. \tag{50}$$

Эта формула показывает, что $(2\pi)^{-1}\Gamma(x+iy)$ – преобразование Фурье $F^{-1}_{\sigma\to y}$ от функции $e^{\sigma x - e^\sigma}$, принадлежащей пространству Шварца $S(\mathbb{R})$. Путь интегрирования можно сдвинуть на любую горизонтальную прямую в полосе $\{\sigma : |\operatorname{Im}\sigma| < \pi/2\}$. При этом за знак интеграла выносится $e^{-y \operatorname{Im}\sigma}$. Выбирая $\operatorname{Im}\sigma$ одного знака с y, получаем нужную оценку (49). Итак, интеграл справа в (48) абсолютно сходится.

Теперь выведем аналогичную (48) формулу для $e^{-t\lambda}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$:

$$e^{-t\lambda} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} (t\lambda)^{-z} \Gamma(z)\, dz. \tag{51}$$

Здесь $t\lambda$ можно заменить одной буквой u:

$$e^{-u} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} u^{-z} \Gamma(z)\, dz. \tag{52}$$

Проверим формулу (52).

Используя формулу обращения преобразования Фурье, получаем из (50)

$$e^{\sigma x - e^\sigma} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x+iy) e^{-i\sigma y}\, dy.$$

Заменим здесь e^σ на u и поделим обе части на u^x; получим

$$e^{-u} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{-(x+iy)} \Gamma(x+iy)\, dy, \quad y > 0,$$

а это и есть формула (52). Здесь пока $u > 0$, но, используя оценки (43),(49), можем продолжить правую часть голоморфно на u с $\operatorname{Re} u > 0$. Подставляя $u = t\lambda$, получаем (51).

8. Подставим (51) в формулу (32). Переставляя интегралы (можно проверить, что это возможно в силу абсолютной сходимости повторных интегралов), получаем

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} t^{-z} \Gamma(z) (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \lambda^{-z} R_A(\lambda)\, d\lambda\, dz.$$

Остается воспользоваться формулой (20). □

Приведем еще три формулы. Первые две есть в книге Красносельского с соавторами, упомянутой на прошлой лекции; их несложно проверить самостоятельно.

9. *При* $\varphi_0 > \pi/2$ *и* $\operatorname{Re}\mu \le 0$

$$R_A(\mu) = \int_0^\infty e^{-tA} e^{\mu t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t(A-\mu I)}\, dt. \tag{53}$$

10. *При* $\varphi_0 > \pi/2$, $\operatorname{Re} z > 0$

$$A^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-tA}\, dt. \tag{54}$$

Эти две формулы напоминают известные формулы для преобразования Лапласа от экспоненты и степени:

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{\mu t}\, dt = \frac{1}{p-\mu} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-pt} t^n\, dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Третья формула – обобщение формулы (40):

11. *При натуральном* q *и* $0 < c < q$ *и* μ *из угла позитивности*

$$[R_A(\mu)]^q = \frac{1}{2i} \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(z-1)\dots(z-q+1)(-\mu)^{z-q}}{\sin \pi z} A^{-z}\, dz. \tag{55}$$

В доказательстве проверяется и используется формула типа (15) для степени резольвенты

$$[R_A(\mu)]^q = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\lambda - \mu)^{-q} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{56}$$

Контур можно заменить малой окружностью с центром в μ. Подставим сюда выражение для резольвенты из (40) с заменой μ на λ. Меняя местами интегралы, получаем

$$[R_A(\mu)]^q = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{1}{\sin \pi z} A^{-z}\, dz\, \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda-\mu| = r} (\lambda - \mu)^{-q} (-\lambda)^{z-1}\, d\lambda.$$

Вычисляя интеграл через вычет подинтегральной функции в точке $\lambda = \mu$, приходим к формуле (54) пока с $0 < c < 1$. Но подинтегральное выражение голоморфно по z в полосе $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < q\}$. Поэтому c можно считать лежащим между 0 и q.

На ближайших лекциях мы будем заниматься изучением резольвенты $R_A(\lambda)$ позитивного эллиптического оператора A положительного порядка $m > n$ на замкнутом многообразии M. При условии $m > n$ резольвента, как мы увидим, является интегральным оператором

$$R_A(\lambda)f(x) = \int K(x,y,\lambda)f(y)\,dy$$

с непрерывным ядром $K(x,y,\lambda)$. Цель будет состоять в получении асимптотической формулы для *следа ядра резольвенты*

$$\mathrm{tr}\,R_A(\lambda) = \int K(x,x,\lambda)\,dx$$

при $\lambda \to -\infty$. В случае, когда A самосопряженный оператор с положительными собственными значениями, мы выведем из нее асимптотическую формулу для собственных значений оператора A при помощи тауберовой теоремы.

Приближением к резольвенте является параметрикс. Главный член параметрикса отвечает символу

$$\frac{1}{a_0(x,\xi)-\lambda}\,, \tag{1}$$

где $a_0(x,\xi)$ – главный символ ПДО A. Он, как мы помним, определен глобально как функция на кокасательном расслоении. Мы сейчас для простоты предполагаем, что λ отрицательно (на самом деле можно рассматривать большие по модулю λ из угла позитивности). Указанная дробь нуждается в сглаживании при малых ξ или малых (ξ,λ). Но мы сейчас составляем только грубый план действий. Если $m > n$, то ПДО

$$B(\lambda)u(x) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}[a_0(x,\xi)-\lambda]^{-1}u(u)\,dyd\xi \tag{2}$$

в $\mathbb{R}^n$ является интегральным оператором

$$\int K_0(x,y,\lambda)u(y)\,dy \tag{3}$$

с непрерывным ядром, которое имеет вид

$$K_0(x,y,\lambda) = (2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}[a_0(x,\xi)-\lambda]^{-1}d\xi, \tag{4}$$

этот интеграл абсолютно сходится (на бесконечности). Полагая $y = x$ и интегрируя, а затем делая подстановку $\xi = (-\lambda)^{1/m}$, получаем уже в случае многообразия M вместо $\mathbb{R}^n$

$$\int_M K_0(x,x,\lambda)dx = (2\pi)^{-n}\iint_{T*M}[a_0(x,\xi)-\lambda]^{-1}d\xi = c(-\lambda)^{n/m-1}, \tag{5}$$

где

$$c = (2\pi)^{-n}\iint_{T*M}\frac{1}{a_0(x,\eta)+1}\,d\eta. \tag{6}$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}\,R_A(\lambda) = c(-\lambda)^{n/m-1} + o((-\lambda)^{n/m-1}) \quad (\lambda \to -\infty). \tag{7}$$

Это и есть (простейшая) асимптотическая формула для следа ядра резольвенты.

Пусть теперь A –самосопряженный ПДО с положительными собственными значениями. Если $\{e_j(x)\}_1^\infty$ – ортонормированный базис из его собственных функций, а λ_j – соответствующие собственные значения, то

$$R_A(\lambda)u = \sum \frac{1}{\lambda_j - \lambda}(u, e_j)e_j, \tag{8}$$

и формально это интегральный оператор на M

$$\int_M K(x, y, \lambda)u(y)\, dy \tag{9}$$

с ядром

$$K(x, y, \lambda) = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j - \lambda} e_j(x)\overline{e_j(y)}. \tag{10}$$

Так как ядро непрерывно, а числовые множители $1/(\lambda_j - \lambda)$ положительны, то уже неформально, в силу теоремы Мерсера, получаем, что этот ряд сходится равномерно. Полагая $x = y$ и интегрируя по многообразию, получаем

$$\operatorname{tr} R_A(\lambda) = \sum \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = \operatorname{tr} R_A(\lambda). \tag{11}$$

Эта формула объясняет спктральный смысл следа ядра резольвенты. Ввиду конечности этой суммы резольвента – *ядерный оператор*.

Сопоставляя эту формулу с (7), получаем

$$\sum \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = c(-\lambda)^{n/m-1} + o((-\lambda)^{n/m-1}). \quad (\lambda \to -\infty). \tag{12}$$

На самом деле получится более точная оценка остатка.

Теперь применяется тауберова теорема Харди–Литтльвуда (для преобразования Стильтьеса). Из (12) вытекает асимптотическая формула для λ_j:

$$\lambda_j = d\, j^{\frac{m}{n}} + o(j^{\frac{m}{n}}). \tag{13}$$

Постоянная d выражается через c. Здесь можно бороться за улучшение оценки остатка, но (13) – это принципиальный весьма общий результат в спектральной теории эллиптических операторов.

Кроме того, получается асимптотическое разложение следа ядра резольвенты $R(\lambda)$ по убывающим степеням переменной $-\lambda$ без предположения о самосопряженности оператора. И этот след тоже имеет спектральный смысл.

Если условие $m > n$ не выполнено, то в случае самосопряженного оператора с положительными собственными значениями следует перейти к достаточно высокой натуральной степени оператора A. Если же самосопряженности нет, а есть только позитивность, то при таком переходе ее можно потерять и вместо этого надо рассматривать степень резольвенты.

Если оператор дифференциальный, то непосредственно получается бесконечное асимптотическое разложение для следа резольвенты или ее степени. Если же оператор псевдодифференциальный, то непосредственно получается только конечное асимптотическое разложение, что связано с рамками исчисления Грубб для ПДО, эллиптических с параметром. Чтобы получить полное асимптотическое разложение, надо сначала изучить аналитическое продолжение следа оператора A^{-z} и затем использовать выражение для резольвенты через степень оператора.