Лекция 8

4. Функции от эллиптических операторов

1. . Пусть $u(x)$ – функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$, где $s > n/2$. Мы знаем, что она непрерывна. Точнее, она непрерывна, если ее отождествить с

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} v(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где $v = Fu$. Функция (1) не имеет разрывов, которые могли быть у исходной функции. Условимся при $s > n/2$ отождествлять $u(x)$ с (1).

Сейчас мы уточним свойства этой функции.

1. *При* $s > n/2$ *справедливы неравенства*

$$|u(x)| \leq C_1 \|u\|_s^{n/2s} \|u\|_0^{1-n/2s} \tag{2}$$

и

$$|u(x) - u(\widetilde{x})| \leq C_2 |x - \widetilde{x}|^{\mu} \|u\|_s, \tag{3}$$

где постоянные C_j *не зависят от функций и* μ *– любое положительное число, меньшее* $\min(s - n/2, 1)$.

. Имеем

$$|u(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int |v(\xi)| (r^2 + |\xi|^2)^{s/2} (r^2 + |\xi|^2)^{-s/2} d\xi.$$

В правую часть теперь включен параметр r. Используя неравенство Шварца, получаем

$$|u(x)|^2 \leq (2\pi)^{-2n} \int |v(\xi)|^2 (r^2 + |\xi|^2)^s d\xi \int (r^2 + |\xi|^2)^{-s} d\xi. \tag{4}$$

В первом интеграле справа воспользуемся очевидными неравенствами

$$(r^2 + |\xi|^2)^s \leq 2^s (r^{2s} + |\xi|^{2s}) \leq 2^s [r^{2s} + (1 + |\xi|^2)^s].$$

Во втором сделаем подстановку $\xi = r\eta$. Получим

$$|u(x)|^2 \leq c_1 \big[r^{2s} \|u\|_0^2 + \|u\|_s^2\big] r^{n-2s} = c_1 \big[r^n \|u\|_0^2 + r^{n-2s} \|u\|_s^2\big], \tag{5}$$

где

$$c_1 = (2\pi)^{-2n} 2^s \int (1 + |\eta|^2)^{-s} d\eta.$$

Теперь мы подставим в (5)

$$r = \left(\frac{\|u\|_s}{\|u\|_0}\right)^{1/s}. \tag{6}$$

Получим неравенство

$$|u(x)|^2 \le 2c_1 \|u\|_s^{n/s} \|u\|_0^{2-n/s},$$

эквивалентное (2). Выбор r сделан из следующих соображений: функция $f(r) = a^2 r^n + b^2 r^{n-2s}$ достигает минимума при $r = c_0(b/a)^{1/s}$, где c_0 не зависит от a и b. Имеется в виду точка, в которой $f'(r) = 0$.

Чтобы получить неравенство (3), мы напишем

$$u(x) - u(\widetilde{x}) = (2\pi)^n \int [e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}] v(\xi)\, d\xi$$

и снова воспользуемся неравенством Шварца:

$$|u(x) - u(\widetilde{x})|^2 \le (2\pi)^{-2n} \int |v(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \int |e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi. \quad (7)$$

Далее,

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad |e^{i\alpha} - e^{i\beta}|^2 \le 2|\alpha-\beta|^2$$

в силу теоремы Лагранжа, применяемой к косинусу и синусу. Поэтому

$$|e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}|^2 \le 2|x-\widetilde{x}|^2 |\xi|^2. \quad (8)$$

Если $2 - 2s < -n$, сразу получается неравенство, эквивалентное (3), с $\mu = 1$, т.е. даже чуть лучше, чем в формулировке. Если $2 - 2s > -n$, то немного загрубим (8) и при $2\mu - 2s < -n$ напишем

$$|e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}|^2 \le 4|x-\widetilde{x}|^{2\mu} |\xi|^{2\mu}, \quad (9)$$

и это дает нам

$$|u(x) - u(\widetilde{x})|^2 \le 4(2\pi)^{-2n} \int |\xi|^{2\mu} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \, |x-\widetilde{x}|^{2\mu} \|u\|_s^2,$$

что эквивалентно (3). $\square$

На многообразии M оценка типа (2) получается как следствие (например, при помощи разбиения единицы), а оценка типа (3) получается для достаточно близких точек x и $\widetilde{x}$ в локальных координатах.

2. . Здесь мы докажем две теоремы (Agmon, 1965).

2. *Пусть T – ограниченный оператор из $H^0(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > n/2$. Тогда T – интегральный оператор,*

$$Tu(x) = \int K(x,y) u(y)\, dy, \quad (10)$$

где функция $K(x,y)$ от y принадлежит $H^0(\mathbb{R}^n)$ при каждом x. При этом

$$\left[\int |K(x,y)|^2 dy\right]^{1/2} \le C_1 \|T\|_{0,s}^{n/2s} \|T\|_{0,0}^{1-n/2s}, \quad (11)$$

$$\left[\int |K(x,y) - K(\widetilde{x},y)|^2 dy\right]^{1/2} \le C_2 |x-\widetilde{x}|^{\mu} \|T\|_{0,s}, \quad (12)$$

с любым μ, *удовлетворяющим неравенствам* $0 < \mu < \min(s - n/2, 1)$; C_1 *и* C_2 *– постоянные из неравенств* (2) *и* (3).

Аналогичные утверждения справедливы для оператора на компактном многообразии M. *В этом случае*

$$\left[\iint_{M\times M} |K(x,y)|^2 dx\,dy\right]^{1/2} \le C_3 \|T\|_{0,s}^{n/2s} \|T\|_{0,0}^{1-n/2s}, \tag{13}$$

где постоянная C_3 *не зависит от оператора.*

Интегральные операторы с квадратично интегрируемыми ядрами называются *операторами Гильберта–Шмидта.*

теоремы. Сначала рассмотрим оператор T в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ и $v = Tu$, эту функцию отождествим с

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} (FTu)(\xi)\, d\xi.$$

Тогда $v(x)$ при фиксированном x – линейный непрерывный функционал над функциями $u \in H^0(\mathbb{R}^n)$. Поэтому справедлива формула (10), где функция $K(x,y)$ принадлежит $H^0(\mathbb{R}^n)$ по y при каждом x.

Фиксируя x, рассмотрим $u_x(y) = \overline{K(x,y)}$ как функцию от y. Полагая в (10) $u = u_x$, получаем из (2)

$$\|u_x\|_0^2 = (Tu_x)(x) \le C_1 \|Tu_x\|_s^{n/2s} \|Tu_x\|_0^{1-n/2s} \le C_1 \|T\|_{0,s}^{n/2s} \|T\|_{0,0}^{1-n/2s} \|u_x\|_0.$$

Сокращая на $\|u_x\|_0$ слева и справа, получаем (11).

Фиксируя теперь x и $\widetilde{x}$, положим $u_{x,\widetilde{x}}(y) = u_x(y) - u_{\widetilde{x}}(y)$. Полагая в (10) $u = u_{x,\widetilde{x}}$, получаем из (3)

$$\|u_{x,\widetilde{x}}\|_0^2 = (Tu_{x,\widetilde{x}})(x) - T(u_{x,\widetilde{x}})(\widetilde{x}) \le C_2 |x-\widetilde{x}|^{\mu} \|Tu_{x,\widetilde{x}}\|_s \le C_2 |x-\widetilde{x}|^{\mu} \|T\|_{0,s} \|u_{x,\widetilde{x}}\|_0.$$

Сокращая на $\|u_{x,\widetilde{x}}\|$ слева и справа, получаем (12).

Для M вместо $\mathbb{R}^n$ все повторяется. Неравенство (13) в этом случае очевидным образом получается из (11). □

. Если удовлетвориться менее точной, чем (11), оценкой

$$\left[\int |K(x,y)|^2 dy\right]^{1/2} \le C \|T\|_{0,s}$$

то в уточнении (2) теоремы вложения нет нужды.

3. *Пусть* T *– ограниченный линейный оператор из* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *в* $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > n/2$. *Тогда* T *– интегральный оператор* (10) *в* $H^0(\mathbb{R}^n)$, *и при этом*

$$|K(x,y)| \le C_4 \|T\|_{-s,s}, \tag{14}$$

$$|K(x,y) - K(\widetilde{x},y)| \le C_5 |x-\widetilde{x}|^{\mu} \|T\|_{-s,s}, \tag{15}$$

$$|K(x,y) - K(x,\widetilde{y})| \le C_5 |y-\widetilde{y}|^{\mu} \|T\|_{-s,s} \tag{16}$$

с любым μ, *удовлетворяющим неравенствам* $0 < \mu < \min(s - n/2, 1)$; *здесь* $C_4 = C_1^2$, $C_5 = C_1 C_2$. *В частности, ядро* $K(x,y)$ *равномерно непрерывно.*

Аналогичные результаты справедливы на M.

. Пусть $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $v = Tu \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Имеем в силу (2)

$$|v(x)| \leq C_1 \|v\|_s \leq C_1 \|T\|_{-s,s} \|u\|_{-s}, \tag{17}$$

и в силу (3)

$$|v(x) - v(\widetilde{x})| \leq C_2 |x - \widetilde{x}|^\mu \|v\|_s \leq C_2 |x - \widetilde{x}|^\mu \|T\|_{-s,s} \|u\|_{-s}. \tag{18}$$

Фиксируя x, рассмотрим $v(x)$ как непрерывный линейный функционал над $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Его можно записать в виде

$$v(x) = Tu(x) = \langle K(x,y), u(y) \rangle = \int K(x,y) u(y)\, dy, \tag{19}$$

где правое равенство можно писать при $u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ и $K(x,y)$ – функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$ по y. При этом

$$|K(x,y)| \leq C_1 \|K(x,y)\|_s = C_1 \sup \frac{|v(x)|}{\|u\|_{-s}} \leq C_1^2 \sup \frac{\|v\|_s}{\|u\|_{-s}} = C_1^2 \|T\|_{-s,s}. \tag{20}$$

Это неравенство (14). Из (3) и (20) получаем

$$|K(x,y) - K(x,\widetilde{y})| \leq C_2 |y - \widetilde{y}|^\mu \|K(x,y)\|_s \leq C_1 C_2 |y - \widetilde{y}|^\mu \|T\|_{-s,s}.$$

Это неравенство (16).

Далее, при фиксированных x и $\widetilde{x}$

$$v(x) - v(\widetilde{x}) = \langle K(x,y) - K(\widetilde{x},y), u(x) \rangle = \int [K(x,y) - K(\widetilde{x},y)] u(y)\, dy \tag{21}$$

снова есть линейный непрерывный функционал над $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Последнее равенство можно писать при $u \in H^0(\mathbb{R}^n)$. Действуя как в (20), и используя (18), получаем

$$\begin{aligned} |K(x,y) - K(\widetilde{x},y)| \leq C_1 \|K(x,y) - K(\widetilde{x},y)\|_s &= C_1 \sup \frac{|v(x) - v(\widetilde{x})|}{\|u\|_{-s}} \\ &\leq C_1 C_2 |x - \widetilde{x}|^\mu \|T\|_{-s,s}. \end{aligned}$$

Это неравенство (15).

Получите сами результат на компактном многообразии M. $\square$

1. *Если ПДО* A *на* M *имеет порядок* $m < -n/2$, *то это интегральный оператор Гильберта–Шмидта. А если* $m < -n$, *то его ядро непрерывно.*

2. *Если позитивный ПДО* A *на* M *имеет порядок* $m > n/2$, *то его резольвента – оператор Гильберта–Шмидта. А если* $m > n$, *то ее ядро непрерывно.*

Эти результаты можно извлечь и из анализа параметрикса, но приятнее сразу получить их из теорем Агмона, которые интересны и сами по себе.

У Агмона есть еще такой вариант теоремы 3: если оператор T и сопряженный оператор T^* действуют ограниченным образом из $H^0(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, где $s > n$, то T – интегральный оператор с равномерно непрерывным ядром. Это полезно знать при рассмотрении краевых задач, но нам не понадобится.

3. . Доказательства к утверждениям этого пункта содержатся во многих книгах, например, в книге И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна “Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве”, Наука, 1965.

Пусть T компактный оператор в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим оператор T^*T. Это самосопряженный компактный оператор с неотрицательными собственными значениями. Положительные квадратные корни из его положительных собственных значений называются *s-числами* оператора T. Они обозначаются через $s_j(T)$ и нумеруются в порядке невозрастания с учетом кратностей. Если T – самосопряженный оператор с неотрицательными собственными значениями, то это просто его положительные собственные значения.

Доказывается, что
$$s_j(T) = s_j(T^*) \tag{22}$$
и что если если B – ограниченный оператор, то
$$s_j(BT) \le \|B\| s_j(T), \quad s_j(TB) \le \|B\| s_j(T). \tag{23}$$
Через $\mathfrak{S}_p$, $p \ge 0$, обозначается класс операторов с
$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p < \infty \tag{24}$$
Эти классы называют *классами Неймана–Шаттена.*

Каждый класс $\mathfrak{S}_p$ является идеалом в пространстве линейных ограниченных операторов в H. При $p \ge 1$ в нем вводится норма, определяемая как корень p-й степени из суммы ряда (24). Доказывается, что для оператора из $\mathfrak{S}_p$ ряд из p-х степеней модулей собственных значений тоже сходится. Этот идеал сужается с убыванием p.

Операторы из $\mathfrak{S}_2$ называются *операторами Гильберта–Шмидта.* Доказывается. что в $L_2(M)$ это в точности операторы с квадратично интегрируемыми ядрами. (С таким оператором мы встретились в теореме 2, см. (13).) Здесь M – любое пространство с мерой.

Операторы из $\mathfrak{S}_1$ называются *ядерными.* Ряд из собственных значений такого оператора абсолютно сходится, и его сумма называется *следом* этого оператора.

4. .

4. *Пусть T – интегральный оператор на метрическом пространстве M с мерой dx, имеющий непрерывное ядро $K(x,y)$ и компактный в $H = L_2(M)$.*

Предположим его самосопряженным, и пусть все его собственные значения μ_j $(j = 1, 2, \dots)$ *положительны. Тогда*

$$\operatorname{tr} T = \sum_1^\infty \mu_j = \int_M K(x,x)\,dx. \tag{25}$$

Собственные значения нумеруются с учетом кратностей в порядке невозрастания.

теоремы по существу уже намечено в конце прошлой лекции. Пусть $\{e_j(x)\}_1^\infty$ – ортонормированный базис из собственных функций оператора T. Они непрерывны, так как

$$\int_M K(x,y)e_j(y)\,dy = \mu_j e_j(x).$$

В $L_2(M)$

$$Tu(x) = \sum_1^\infty \mu_j (u, e_j) e_j. \tag{26}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^\infty \mu_j e_j(x)\overline{e_j(y)}. \tag{27}$$

Он сходится равномерно по теореме Мерсера (см. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, “Лекции по функциональному анализу”, п. 98). Пусть T_1 – интегральный оператор с этим ядром. Это самосопряженный оператор с теми же собственными функциями и собственными значениями, что и у T. Поэтому $T = T_1$ и

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^\infty \mu_j e_j(x)\overline{e_j(y)}. \tag{28}$$

Остается положить $x = y$ и проинтегрировать по многообразию. $\square$

Полученный результат применим, конечно, к операторам, удовлетворяющим предположениям теоремы 3 на компактном многообразии M, если это самосопряженные операторы с положительными собственными значениями.

Можно доказать, что теорема 4 остается верной для любого ядерного интегрального оператора с непрерывным ядром, не обязательно неотрицательного и даже не обязательно самосопряженного. Но следует иметь в виду, что одной непрерывности ядра недостаточно для ядерности интегрального оператора.