Лекция 9

5. $A(\lambda) = A - \lambda I$ $\mathbb{R}^n$. Мы предположим, что A – полиоднородный ПДО порядка $m > 0$, сначала в $\mathbb{R}^n$, эллиптический с параметром в угле L на комплексной плоскости с биссектрисой $\mathbb{R}_-$: для главного символа $a_0(x,\xi)$ справедливо неравенство

$$|a_0(x,\xi) - \lambda| \geq c(|\xi|^m + |\lambda|) \quad (|\xi| + |\lambda| \neq 0, \ \lambda \in L). \tag{1}$$

Мы обсудим подробности построения параметрикса и уточним, как именно он аппроксимирует резольвенту. Будем опускать доказательства технических предложений, чтобы не закопаться в этой теме. Кроме того, для простоты будем предполагать, что (полный) символ $a(x,\xi)$ и все члены его разложения

$$a(x,\xi) \approx a_0(x,\xi) + a_1(x,\xi) + \ldots \tag{2}$$

не зависят от x при больших x (чего достаточно для рассмотрения ПДО на замкнутом многообразии), а именно при $|x| \geq r$.

Эти функции $a_k(x,\xi)$ в случае, если A не является дифференциальным оператором, удобно сразу "отремонтировать" следующим образом. Пусть $\theta(\tau)$ – неотрицательная функция из $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, равная 0 при $\tau \leq 1/2$ и 1 при $\tau \geq 1$, заключенная между 0 и 1 при промежуточных τ. Положим

$$a_{\theta,0} = \theta(|\xi|)a_0(x,\xi) + 1 - \theta(|\xi|), \tag{3}$$
$$a_{\theta,k}(\xi) = \theta(|\xi|)a_k(x,\xi) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

и будем считать, что

$$a_{\theta,0}(x,0) = 1, \quad a_{\theta,k}(x,0) = 0 \ \text{ при } \ k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Теперь

$$a(x,\xi) \sim a_{0,\theta}(x,\xi) + a_{1,\theta}(x,\xi) + \ldots, \tag{6}$$

при этом

$$a_{\theta,0}(x,\xi) - \lambda \neq 0 \quad (\forall x, \xi; \ \lambda \in L) \tag{7}$$

и при всех k

$$a_{\theta,k}(x,\tau\xi) = \tau^{m-k} a_{\theta,k}(x,\xi) \quad (|\xi| \geq 1, \ \tau \geq 1). \tag{8}$$

Построим теперь рациональные по λ функции $b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)$ $(l = 0, 1, \ldots)$, положительно однородные по $(\xi, \lambda^{1/m})$ степени $-m-l$:

$$b_{\theta,l}(x,\tau\xi,\tau^m\lambda) = \tau^{-m-l} b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda) \quad (|\xi| \geq 1, \ \tau \geq 1). \tag{9}$$

Сделаем это так, чтобы

$$\left[\sum_0^\infty a_{\theta,k}(x,\xi) - \lambda\right] \circ \left[\sum_0^\infty b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)\right] = 1, \tag{10}$$

где $\circ$ – обычное правило композиции символов. Приравнивая символы одинаковых степеней однородности слева и справа, получаем цепочку соотношений

$$(a_{\theta,0}-\lambda)b_{\theta,0}=1,$$
$$(a_{\theta,0}-\lambda)b_{\theta,j}+\sum_{k+l+\alpha=j,l<j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_{\theta,k}D_x^\alpha b_{\theta,l}=0 \quad (j\geq 1).$$

Из этих соотношений функции $b_{\theta,l}$ последовательно определяются. При этом

$$b_{\theta,0}(x,\xi)=\frac{1}{a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda}\,, \tag{11}$$

$$b_{\theta,1}(x,\xi,\lambda)=\frac{-a_{\theta,1}(x,\xi)}{[a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda]^2}+\frac{-i\sum\partial_{\xi_j}a_{\theta,0}(x,\xi)\cdot\partial_{x_j}a_{\theta,0}(x,\xi)}{[a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda]^3} \tag{12}$$

и т.д. Нетрудно заметить, что при любом $l\geq 1$

$$b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)=\sum_{k\geq 2}\frac{b_{\theta,l,k}(x,\xi)}{[a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda]^k}, \tag{13}$$

где сумма конечна и $b_{\theta,l.k}$ – некоторые многочлены от функций $a_{\theta,0},\dots,a_{\theta,l}$ и их производных. В частности,

$$b_{\theta,l,2}=-a_{\theta,l}. \tag{14}$$

(Забегая вперед, обратим внимание на то, что в случае дифференциального оператора это нуль при $l>m$, и тогда сумма начинается с $k=3$. При росте l один за другим исчезают члены с малыми степенями в знаменателях.)

При этом функции $b_{\theta,l,k}$ принадлежат $S^{m(k-1)-l}$, положительно однородны по ξ в смысле

$$b_{\theta,l,k}(x,\tau\xi)=\tau^{(k-1)m-l}b_{\theta,l,k}(\tau,\xi)\quad (|\xi|\geq 1,\ \tau\geq 1) \tag{15}$$

и не зависят от x при $|x|\geq r$.

Заметим, что модуль $|a_{\theta,0}(x,\xi)|$ оценивается при малых $\lambda\in L$ снизу некоторой положительной постоянной. Отсюда следует, что неравенство (7) сохраняется в

$$L_\rho=L\cup\{\lambda:|\lambda|\leq\rho\} \tag{16}$$

при некотором $\rho>0$, так что наше построение функций b_l сохраняется при $\lambda\in L_\rho$. Несложно проверяется

1. *При* $\lambda\in L_\rho$
$$|a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda|\geq C_0(1+|\xi|^m+|\lambda|). \tag{17}$$

Здесь и дальше постоянные не зависят от (x,ξ,λ).

2. *При* $\lambda\in L_\rho$
$$|b_{\theta,0}(x,\xi,\lambda)|\leq C_0(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-1} \tag{18}$$

и, если $|\alpha|+|\beta|+l>0$,

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)|\leq C_{\alpha,\beta,l}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-2}(1+|\xi|)^{m-l-|\beta|}, \tag{19}$$

так что в общем случае

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)| \leq C'_{\alpha,\beta,l}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-1}(1+|\xi|)^{-m-l-|\beta|}. \tag{20}$$

Эти оценки проверяются “руками”. Они похожи на оценки Грубб, на намного раньше появились у Сили (1967), который исследовал параметрикс, не имея исчисления ПДО с параметром. Ничего лучшего в общем случае не получается.

Если попробовать отказаться от исправления функций $a_k(x,\xi)$ при малых ξ (опустим тогда индекс θ), то наши оценки в общем случае теряют силу и вблизи $\xi=0$ функции $b_{l,k}(x,\xi)$ оказываются неограниченными при $(k-1)m-l<0$. Но это не так в случае дифференциального оператора A, в этом случае исправлять символы при малых ξ не надо (точнее, не надо, если мы рассматриваем λ, отделенные от нуля). А если ограничиться малыми l $(l<m+n)$, то можно обойтись без ремонта и в случае ПДО; мы воспользуемся этим в лекции 11.

Положим

$$r_N(x,\xi,\lambda) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha[a(x,\xi)-\lambda]\cdot D_x^\alpha \sum_{l=0}^N b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda) - 1. \tag{21}$$

Понятно, что это “частная сумма” в (10), если единицу перенести налево.

3. *При $\lambda \in L_\rho$ и любом γ*

$$|\partial_x^\gamma r_N(x,\xi,\lambda)| \leq C_{\gamma,N}\frac{(1+|\xi|)^{m-N-1}}{1+|\xi|^m+|\lambda|}. \tag{22}$$

4. *Пусть $c(x,\xi,\lambda)$ – функция на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times L_\rho$, непрерывная с производными любого порядка по x и не зависящая от x при $|x|\geq r$, и пусть*

$$|\partial_x^\alpha c(x,\xi,\lambda)| \leq C_\alpha \frac{(1+|\xi|)^p}{1+|\xi|^m+\lambda} \tag{23}$$

при некоторых $m>0$, $p\in\mathbb{R}$ и любом α, где C_α не зависят от (x,ξ,λ). Тогда для оператора

$$C(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}c(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi \tag{24}$$

при любом s справедлива оценка

$$||C(\lambda)f||_{s+m-p} + |\lambda|\cdot||C(\lambda)f||_{s-p} \leq C_s||f||_s. \tag{25}$$

Здесь и дальше в этом пункте нормы берутся по $\mathbb{R}^n$.