ЭКЗАМЕН ПО ТЕОРИИ ИГР: НМУ, весна 2004 года

Вам предложено 16 задач общей стоимостью в 700 баллов. Вам выделяется на написание экзамена 2 недели. Срок сдачи — 25 мая, в этот же день вечером в стандартное время 19:10 состоится разбор (некоторых) задач, и сбор Ваших работ. Для получения оценки 5 надо набрать 350 баллов, на четвёрку — 250 баллов, и на тройку — 150. Желаю Вам удачи!

1. (20 баллов) Паша, Саша и Наташа решают, куда сходить в поход: в Московскую Область (МО), в Тверскую Область (ТО) или в Республику Марий-Эл (МЭ). С точки зрения Паши, в порядке предпочтения идут МО-ТО-МЭ; с точки зрения Саши ТО-МЭ-МО, и наконец, с точки зрения Наташи — МЭ-МО-ТО. Голосуют одновременно, и решают по большинству. Если у всех разное, решает Паша (он — их командир).

   Решить игру по доминированию.

2. (30 баллов) **Пример симметричной игры.** Двое играют на деньги. Каждый участник в тайне от другого пишет на листке бумаги число от 1 до n. После этого листки открывают и сравнивают числа. Если оказалось поровну, то ничья. Если числа отличаются на 1, то тот, у кого больше, выигрывает 2. В остальных случаях тот, у кого меньше, выигрывает 1.

   - Можно ли, не производя никаких вычислений, определить цену игры в смешанных стратегиях? Приведите соображения, обосновывающие ваш ответ.
   - Пусть $n \leq 5$. Как надо играть в эту игру?
   - Пользуясь результатами, полученными в предыдущих пунктах, найдите решение игры для произвольного n.

3. (30 баллов) **В погоне за призом.** Трое участвуют в телеигре за большой приз (бутылка коньяка «Белый Аист»). Правила игры такие: каждый записывает тайком натуральное число $(0, 1, \ldots)$. Побеждает тот, кто назвал наименьшее число, не названное больше никем. Если все три называют одно число, приз получает телеведущий.

   - Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях.
   - А теперь пусть можно называть только $0, 1, 2$. Найдите все симметричные равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

4. (20 баллов) **Вновь за призом.** Газета объявила, что выставит ящик водки (1000 рублей) одному или по ящику каждому из двух людей, приславших ей «запрос». Стоимость конверта для высылания запроса равна 1. Участвуют 1002 человека, и каждый решает, прислать ли запрос. Если приславших более двух, никто ничего не получает.

   - Найдите все чистые равновесия Нэша;

- Найдите симметричное смешанное равновесие Нэша.

5. (60 баллов) **Вариация на тему игры Баше (35%).** В игре участвуют двое, ходя по очереди (первый, второй, первый,...). На столе лежит n камней. В свой ход каждый из участников может взять либо столько же камней, сколько было взято его партнером на предыдущем ходу, либо на один больше. На первом ходу можно брать один или два камня. Кто не может продолжать игру по правилам (из-за недостатка камней), тот проиграл.

    - Опишите процесс последовательного определения выигрышных и проигрышных позиций в этой игре. Найдите выигрышные стратегии для малых n.
    - Пусть $n = 14$ и ваш ход. Как надо играть?
    - Тот же вопрос, если $n = 18$.
    - Замечание. В данной задаче авторам неизвестна общая закономерность расположения выигрышных и проигрышных позиций. Восполните пробел!

6. (20 баллов) **Вариация на тему игры Ним.** Снова два участника ходят по очереди. Теперь на столе две кучки камней (m камней в первой кучке и n во второй). В свой ход игрок может взять сколько угодно камней из одной кучки, либо по одному камню из обеих. Надо обязательно взять хотя бы один камень. Выигрывает тот, кто своим ходом оставляет пустой стол.

    - Пользуясь принципом Цермело, определите выигрышные и проигрышные позиции в игре. Для этого, например, можно исследовать несколько первых позиций и угадать закономерность. Обязательно обоснуйте свой ответ.
    - Опишите выигрышную стратегию игрока (в случае, если она у него есть). Когда выигрывает первый, а когда второй?
    - Пусть $m = 98$, $n = 100$ и вам ходить. Ваши действия?

7. (50 баллов) Приведите пример игры без условия Куна, в которой не существует секвенциального равновесия даже в смешанных стратегиях. (Эта задача довольно зыбкая; ответ мне неизвестен, да и понятие решения там плохо определимо. Однако, если кто продемонстрирует блестящий пример, заработает двойной бонус.)

8. (40 баллов) **Модель Рубинштейна.** Мама испекла пирог, и оставила его в духовке своим двум сыновьям. Потом она ушла в магазин на 3 часа, и наказала: каждые полчаса, начиная с момента закрытия за ней двери, пытаться делить пирог по принципу «один делит, другой одобряет». Если не одобряет, то пирог полчаса остывает в печи, а потом снова. Начинает предлагать старший сын, затем — по очереди. За время получаса пирог сохраняет долю α своих замечательных вкусовых свойств с точки зрения старшего брата, и β — с точки зрения младшего. Эти параметры общеизвестны. Если мама пришла, и обнаружила неподеленный пирог (в момент прихода мамы уже делить нельзя), то она его сходу съедает сама.

    - Найти равновесие, совершенное на подыграх;

- Что, если мама ушла навсегда?

9. (130 баллов) **Дуэль.** Трое захотели в жёны одну и ту же девушку. Решили драться на дуэли. Дуэль протекает так: каждый период времени каждый из дуэлянтов выбирает, стрелять ли в воздух, либо в одного из своих соперников (т.е. 3 стратегии у каждого). Первый промахивается с вероятностью α, второй — с вероятностью β, третий — с вероятностью γ. Если после пальбы остался в живых более, чем один человек, то дуэль продолжается. Падший мёртвым получает 0, единственный живой — 1.

   Найдите равновесие, совершенное на подыграх. Может ли быть задача разрешена по доминированию? При каких значениях параметров? (Это очень громоздкая и сложная задача. Частичные решения будут частично оценены, конечно.)

10. (40 баллов) **Маленькие семейные радости.** У мужа на работе предстоит веселая вечеринка. Жена обещает мужу семейный скандал, если он напьется. Во время вечеринки муж может с вероятностью p влюбиться в молодую сотрудницу. После этого он должен решить, напиваться ему или нет. Если он не напьется, то его выигрыш равен нулю; выигрыш жены в этом случае тоже равен нулю.

    Если муж напьется, жена должна решить, сидеть тихо или же устроить скандал. Если учинить скандал влюбленному мужу, то он уйдет к молодой сотруднице. Тогда выигрыши мужа и жены равны $(-1, -3)$; учинив скандал просто пьяному мужу, жена и муж получают по -1. Если сидеть тихо, то выигрыш жены равен -2; выигрыш влюбившегося мужа при этом равен -3 (ему стыдно), а просто пьяного мужа равен 5.

    - Формализуйте игру в развернутой форме.
    - Найдите все сильные секвенциальные равновесия.
    - А что, если влюбиться может только пьяный муж?

11. (40 баллов) **Затянувшийся семейный спор.** Рассмотрим стандартный семейный спор, когда ФФ=(3,2); ФТ=(1,1); ТФ=(0,0); ТТ=(2,3). Возможно ли, что при его многократном (но конечном) повторении совершенное на подыграх равновесие будет таким, что:

    - в первом периоде будет сделан ход ФТ;
    - в первом периоде будет сделан ход ТФ?

    Опишите пример, или докажите обратное.

12. (70 баллов) **Стратегическое лидерство в состязаниях.** Трое соискателей A, B, C ведут борьбу за приз, ценность которого равна 1. Они последовательно выбирают свои уровни усилий x_A, x_B, x_C (сначала выбирает A, потом B, потом C). Вероятность для участника i выиграть приз равна $\frac{x_i}{x_A+x_B+x_C}$. Считаем, что для каждого соискателя затраты усилий в размере x эквивалентны потере x денежных единиц. Участники нейтральны к риску.

Опишите, как устроена развернутая форма игры, и найдите равновесие (не только равновесные уровни усилий, но и стратегии участников!) при следующих информационных предположениях, являющихся общим знанием:

(a) Каждый участник знает все, что происходило до его хода.

(b) Участники B и C знают x_A; C не знает x_B.

(c) Участник C знает x_A; больше никто ничего не знает.

В каждом случае используйте наиболее подходящую концепцию решения игры. В каких случаях совершенные по подыграм равновесия Нэша не дают адекватного предсказания исхода?

13. (30 баллов) **Семейные вечера.** По вечерам семья любит слушать музыку. Мама обожает Аллу Пугачеву (точка 0 на прямой), сын больше всего любит группу Чайф (точка 0.5 на той же прямой), а папа тащится от Шнура из группы "Ленинград" (точка 1 на прямой). Удовольствие от музыки равно 1 минус расстояние от нее до своей любимой музыки.

    Установка воспроизводящего устройства требует 1 издержек. Любая пара членов семьи или любой член в отдельности могут уйти в одну из свободных комнат, самостоятельно установить проигрывающее устройство и слушать музыку там. Персональные издержки от прослушивания нелюбимой музыки могут компенсироваться другими членами «группы по интересам».

    - Формализуйте эту ситуацию как коалиционную игру с побочными платежами. Является ли игра супераддитивной? Супермодулярной?
    - Опишите ядро этой игры.
    - Найдите вектор Шепли этой игры. Лежит ли он в ядре? Какая музыка будет играть? Кто сколько вносит на воспроизводящее устройство?

14. (20 баллов) Совет безопасности ООН состоит из пяти постоянных и десяти переменных членов. Никакое решение не может быть принято без одобрения со стороны всех постоянных членов, но и без 10 голосующих «за»тоже. Коалиция выигрывет, если удовлетворяет обоим требованиям. Найти распределение сил, в соответствии с ядром и с вектором Шепли. Является ли игра супермодулярной?

15. (50 баллов) Нефть из Ирака следует в США многими путями, возможно переплетаясь по пути (строго говоря, есть граф нефтепроводов, и нигде посередине нефть качать нельзя). У каждого нефтепровода существует максимальная пропускная способность. Каждый из нефтепроводов контролируется одним из бандитских формирований. США готово платить за нефть пропорционально мощности потока. Доказать, что бандиты всегда могут договориться, не развязывая войны.

16. (50 баллов) **Коррелированное равновесие.** Двое бегут друг навстречу другу по лыжне. Можно либо уступить пол-лыжни, либо не уступать вовсе. Решение принимается одновременно. Если вы уступили, а вам — нет, то вы вынуждены

быстренько уступить ещё и вторую половину, и ваш выигрыш от этого равен 0, а выигрыш наглеца — 3. Если оба вежливо уступили, то обоим по 2; если оба наглецы, то столкнулись, и обоим по -1.

Осознав, что в игре существуют два несимметричных равновесия, а наилучший исход недостижим при некооперативном поведении, игроки решили использовать «коррелированные» смешанные стратегии. А именно, они пригласили арбитра, продиктовали ему вероятности всех четырёх исходов, предложили ему разыграть в тайне от них соответствующую лотерею, и каждому игроку на ушко шепнуть, как ему ходить. Дальше, разумеется, каждый волен решать, следовать ли ему полученному предписанию.

Возможно ли таким образом добиться чего-либо большего, чем просто кидая монетку, и в случае решки разыгрывая одно из равновесий Нэша, а при орле — другое? Какие выигрыши достижимы при таком *механизме*?