Теория игр: лекция 1

Определение. *Игрой в нормальной (или стратегической) форме* называется следующий набор данных:

- Множество N игроков;
- Набор множеств $\{S_i\}_{i\in N}$, по одному на каждого игрока, называемых *стратегическими множествами* игроков;
- Множество Y, называемое *множеством исходов* игры;
- Отображение $f : \times_{i\in N} S_i \to Y$, называемое *игровой формой*, и
- Набор полных предпорядков $\{\succeq_i\}_{i\in N}$, по одному для каждого игрока, определённых на множестве исходов игры, Y.

Напомню, что предпорядок отличается от порядка тем, что антисимметричности не требуется. Таким образом, остаётся просто рефлексивное транзитивное отношение. Полнота означает сравнимость любых двух элементов между собой[1].

Мы смотрим на эту ситуацию так: разные игроки по-разному ранжируют различные исходы между собой, и каждый игрок «тянет на себя одеяло». Однако, любой игрок контролирует только свою переменную в игровой форме, поэтому что таки произойдёт, непонятно. Грубо говоря, вся теория игр занимается различными попытками дать ответ на этот вопрос.

Соответственно, и методология теории игр отличается от методологии, скажем, в теории оптимизации. Когда ищется максимум функции по всем переменным сразу, интересными вопросами являются вопросы компактности множества определения функции, возможностями в явной форме решить задачу максимизации и т.п. В теории игр ситуация кардинально иная: мы просто плюём на вопросы существования максимума, требования регулярности и т.п. Большинство интересных и содержательных вопросов в теории игр возникает уже на уровне так называемых *конечных* игр, в которых как множество игроков, так и стратегические множества всех игроков конечны. Понятно, что задачи оптимизации в таких случаях бессодержательны. В то же время, вопросы существования и единственности различных концепций решения игр по праву занимают свою нишу в общей теории.

Помимо вопросов предсказания исхода игры, популярными задачами являются задачи вида: Как создать игровую форму с предписанными ей свойствами с тем, чтобы исход в соответствующей ей игре лежал в том или ином подмножестве Y? Подобные задачи относятся к бурно развивающейся ветви теории игр, называемой «изобретение (вариант: построение) механизмов». В дальнейшем мы её коснёмся (в том числе, я отдельно расскажу о собственных достижениях в этой области).

[1] В экономике существует специальный термин: *рациональные предпочтения*, обозначающий полный предпорядок.

Если множество игроков $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — конечное, то игру можно задать просто отображением

$$u : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbf{R}^n,$$

интерпретируя само множество $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ как множество исходов игры, а i-ю компоненту функции u как *функцию полезности, или выигрыша*, задающую предпорядок $\succeq_i$ в том смысле, что

$$u(s) \geq u(s') \leftrightarrow s \succeq_i s',$$

для любых *профилей стратегий* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ и s' из S. Тогда можно представить себе (в случае конечности всех стратегических множеств), что перед каждым игроком находится «панель управления», на которой S_i кнопочек, и все игроки одновременно нажимают по одной кнопочке, после чего получают свои выигрыши и расходятся по домам.

Приведём несколько примеров игр (более полную подборку см. в нашем сборнике задач по теории игр, выходящем в ЦЭМИ в этом или следующем году).

1) Игроков много, каждый игрок i задумывает число $s_i \in \mathbf{N}$, потом все одновременно (или просто честно) сообщают, что они задумали. Выигрывает тот, кто задумал наименьшее число, но чтоб его число не задумал больше никто (то есть, скажем, если трое назвали 0, двое 1, никто не назвал 2, и всего один Харитон назвал 3, то выиграл Харитон).

2) Игроков двое, они одновременно выкидывают 1 или 2 пальца. Первый выигрывает в том случае, если общее число пальцев равно 3, и его выигрыш равен 3; второй выигрывает при исходах 2 и 4, и выигрывает опять-таки 2 или, соответственно, 4.

3) Несколько продавцов мороженого обслуживают линейный пляж, и выбирают (одновременно) торговые точки. Выигрыш каждого из них — это количество народу, купившее мороженое у него (цена у всех одинаковая). Понятно дело, каждый из греющих пузо курортников невероятно ленив, и идёт к ближайшему киоску.

4) В игре «Мафия» перед началом очередной ночи осталось трое живых: честный, маньяк и мафиози. Считаем, что маньяк и мафия играют каждый за себя, и маньяк не относится к партии честных (мафия, понятно, тоже). Ночью каждый из убийц имеет право одного выстрела.

Во всех случаях требуется попытаться предсказать, каков будет исход игры. При попытке понять, что же произойдёт в игре, важно условиться о том, что игрокам известно, и из каких предпосылок они исходят, принимая решение. Ортодоксальная теория игр предполагает, что правила игры (включая функции выигрыша всех игроков!) являются так называемым *общим знанием*, то есть выписаны на доске перед ними в момент принятия решения о том, на какую кнопку нажать. Тогда каждый знает всё об игре, каждый знает, что каждый знает всё об игре и т.п. — точная формализация понятий общего и необщего знания не является тривиальной, и будет рассмотрена нами позже.

Пока же предположение об общем знании нами принимается, равно как и предположение о том, что *каждый игрок стремится максимизировать свой собственный выигрыш, исходя из всей доступной ему информации*[2]. Кроме того, считается, что игра будет сыграна один раз, и никакой там мести или благодарности не последует (экономисты бы сказали, что отсутствуют «побочные платежи», или «трансферты»).

Фактически, задание конечной игры равносильно заданию n-тензора (т.е. n-мерной параллелепипедообразной таблицы) со значениями в $\mathbf{R}_n$. Если играют двое, то игра задаётся просто матрицей, в которой в каждую клетку выписаны два числа: выигрыш первого игрока, и выигрыш второго.

Ниже перечислены понятия и концепции решения игр в нормальной форме, с краткими пояснениями их общефилософского содержания. После этого я приведу несколько теорем, связанных с играми в нормальной форме, и ставших уже классическими. Следующее определение является стартовой точкой при анализе игр в нормальной форме.

Определение. Профиль стратегий $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ называется *равновесием Нэша*, если

$$\forall i \in N \forall s_i \in S_i f(s_i, s_{-i}^*) \preceq_i f(s^*)$$

(здесь и далее, под s_{-i} понимается набор $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, а под (s_i, s'_{-i}) — результат вставления s_i в набор s'_{-i} вместо выкинутого s'_i).

Иначе говоря, никому не выгодно отклониться от предписанного розыгрыша (профиля s^*), если более никто не отклоняется. В случае конечной игры это равносильно тому, что

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \forall s_i \in S_i u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_I(s^*).$$

Вопросы существования и единственности равновесия Нэша являются непростыми и будут обсуждаться далее. Заметим, однако, что общая надежда на существование равновесия Нэша в произвольно заданной игре существует, поскольку речь идёт о решении n уравнений с n неизвестными (в «хороших» играх поиск максимума у каждой функции равносилен решению уравнения вида $u' = 0$). Вместе с тем, в некоторых из вышеприведённых примеров равновесия нет (сами убедитесь в этом!). Проблема в том, что конечные игры не обладают требуемыми свойствами регулярности, гарантирующими совместность соответствующей «системы уравнений». Чтобы эту регулярность восстановить, приходится вводить так называемое «смешанное расширение игры»(см. ниже).

[2]Это снова сложно формализуемое понятие, в экономике оно заменяется одним термином: «рациональность» игроков.