Кооперативная теория игр

Трое шли по улице, и нашли 100-долларовую бумажку. Будучи не обременёнными какими-либо моральными принципами, они начали обсуждать, как её поделить. Первый предложил второму: давай пополам, а третьего пошлём! Второй говорит: Давай! Но тут третий подходит ко второму, и говорит: Давай тебе 60 баксов, мне — 40, а первый пусть пойдёт погуляет. Второй говорит: Почему бы и нет! Но тут первый третьему предлагает: да ладно тебе, давай второго пошлём, а сами поровну разделим....... Так и делили допоздна, пока не подошёл милиционер, и не отнял у них «трофей».

Мораль этой басни состоит в том, что в кооперативной теории игр бывают задачи без решения. Подобно тому, как дилемма заключённого является визитной карточкой некооперативной теории, а задача про пьяницу-мужа — прилюдеей к анализу игр, заданных в развёрнотуй форме, только что приведённая ситуация открывает обширную, красивейшую и слабоизученную ветвь науки — кооперативную теорию игр.

Перейдём к строгим определениям. Общего у кооперативной теории с некооперативной — только задание множества игроков N. Никаких стратегических множеств и функций выигрыша нет — вместо этого аксиоматически заданы возможности любых «коалиций» игроков, т.е. любых непустых подмножеств $S \subset N$. Благодаря этому, кооперативная теория игр часто называется также коалиционной.

Точнее, в описание игры входит задание множеств

$$V(S) \subset \mathbf{R}^S \tag{1}$$

для всех $S \in 2^N$, кроме пустого множества. Предполагается, что коалиции S доступны любые векторы выигрышей $x_S = \{x_i\}_{i \in S} \in V(S)$; не оговаривается, какой именно вектор выигрышей будет выбран данной коалицией в случае её формирования. Множества $V(S)$ предполагаются замкнутыми, неограниченными снизу (т.е. $V(S) - \mathbf{R}^S_+ \subset V(S)$), часто — выпуклыми и иногда — ограниченными сверху (т.е. $\exists X_S \in \mathbf{R}^S : \quad \forall x_S \in V(S) x_S \leq X_S$ покоординатно).

Идеология задания игры «в характеристической форме»(т.е. так, как описано выше) подразумевает, что коалиция, отсоединяясь, вольна делать что угодно, не испытывая влияния со стороны (и не оказывая влияния на) остальных игроков. Разумеется, это не всегда правдоподобно; например, в ситуации игры в нормальной форме неясно, как определить коалиционную игру. Тогда либо встают на позиции «максимина»(т.е. что все остальные игроки вам гадят по полной программе), либо изучают ситуацию, не прибегая к характеристической форме. В последнем случае естественно возникает концепция сильного равновесия, введённая на первой лекции и являющаяся по своей натуре полу-кооперативной концепцией решения игры. Мы же теперь будем анализировать ситуации, в которых задание игры в характеристической форме является адекватным.

Примеры.

Марьяжи. В посёлке для семейной жизни созрело M мужчин и W женщин. Каждый мужчина как-то ранжирует женщин, и наоборот...

Встаёт вопрос о том, что такое решение игры, заданной в характеристической форме. Здесь существуют определённые разночтения, однако общий принцип всегда один и тот же. А именно, если игрокам предложен некоторый вектор выигрыша

$x_N \in \mathbf{R}^N$, то никакая коалиция не должна воспротивиться ему (т.е. найти способ обеспечить своим членам больший выигрыш). Мы приходим к следующему фундаментальному определению.

Определение. *Ядром* кооперативной игры, заданной в характеристичекой форме (1), называется множество недоминируемых дележей, т.е. множество дележей $x_N \in \mathbf{R}^N$ таких, что $\nexists S \subset N: \quad x_S \in Int[V(S)]$, где x_S — проекция вектора x_N на подпространство $\mathbf{R}^S \subset \mathbf{R}^N$, а под $IntA$ понимается внутренность множества A.

Однако я сознательно не дал определение понятию дележа. Конечно, делёж — это не произвольный вектор пространства $\mathbf{R}^N$: с какой это стати игроки могут получать огромные выигрыши? Конечно, определение дележа надо как-то связать с данными игры. Простейший вариант таков:

A-ядро получается, если под дележом понимать $x_N \in V(N)$, то есть вектор, доступный самой большой коалиции, состоящей из всех игроков.

Однако A-ядро может оказаться пустым. (Например, так будет в игре, описанной в начале этой лекции.) Возникает мысль: а с чего бы им обязательно собираться и функционировать вместе? Может быть, лучше разбиться на группы? Это приводит к следующему определению дележа, и, соответственно, ядра кооперативной игры.

B-ядро получится, если под дележом понимать такой $x_N \in \mathbf{R}^N$, что существует *разбиение* множества игроков N на группы

$$N = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_k, \tag{2}$$

для которого все проекции $x_{S_j} \in V(S_j), \ \ j = 1, \ldots, k$.

Обобщая это понятие далее, приходим к его «смещанной» версии:

C-ядром называется множество недоминируемых $x_N \in \mathbf{R}^N$, для которых существует набор $(\mu_1, \ldots, \mu_K)$ «долей времени», в течение каждого из которых реализуется своё разбиение (2). Здесь $K = |\pi[N]|$ — мощность множества разбиений, $\mu_k \geq 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{K} \mu_k = 1$, в каждом промежутке времени реализуется свой $x_N^k \in \mathbf{R}^N$, а $x_N = \sum\limits_{k=1}^{K} \mu_k x_N^k$.

Пока что всё должно быть прозрачным — как водится, мы допустили «смешанную стратегию» поведения для множества наших игроков, и усреднили выигрыши по обычным законам среднего. Проблема состоит в том, что всё ещё не снята проблема пустоты ядра: в игре, описанной в начале этой лекции, все три введённых множества пустуют. Чтобы в этом убедиться, введём ещё одно важное понятие.

Определение. Игра, заданная в характеристической форме (1), называется *супераддитивной*, если возможности объединения непересекающихся коалиций сулят выигрыш их членам. Точнее,

$$\forall K, K' \in 2^N \setminus \emptyset \quad V(K) \times V(K') \subset V(K \sqcup K'). \tag{3}$$

Игра со стодолларовой бумажкой является супераддитивной (легко проверить). В то же время, верна следующая лемма.

Лемма. Для супераддитивных игр все введённые выше концепции ядра совпадают друг с другом.

Упражнение. Докажите эту лемму.

Поэтому следует искать что-то ещё, обобщающее эти концепции ядра. Ниже определяется, а затем обсуждается концепция *дробного ядра*, или D-ядра, а затем оно несколько сужается до E-ядра. Сужение это возможно потому, что уже E-ядро (следовательно, и D-ядро) непусто для весьма широкого класса игр. В то же время, E-ядро в общем случае не находится с C-ядром в отношении сужения или, наоборот, расширения; B-ядро обязательно лежит внутри E-ядра.

Чтобы мотивировать дальнейшие конструкции, ответьте на вопрос: кто из вас работает только на одной работе и в полную силу? Наверное, никто; или единицы. Более типичной является такая ситуация, когда человек занят во множестве мест, с различной интенсивностью и различными зарплатами. Причём именно одновременно (чтобы оттолкнуться от только что рассмотренной концепции C-ядра). Поэтому под дележом можно было бы понимать вектор выигрышей, получающийся при усреднении выигрышей «на разных местах работы». А сами места работа, то есть различные коалиции $S \subset N$, тоже функционируют не на 100 процентов, а на λ_S каждая.

Здесь сделано допущение (в жизни не всегда верное), что все члены коалиции заняты в ней в одинаковой степени, то есть именно с интенсивностью λ_S. Это допущение подсказывает правильное условие на согласованность набора λ_S со здравым смыслом. А именно:

Определение. Набор $\{lambda_S\}_{S \subset N}$ неотрицательных чисел называется *сбалансированным*, если в сумме каждый игрок $i \in N$ занят полное время: $\forall i \in N \quad \sum\limits_{S \ni i} \lambda_S = 1$. Своеобразный «баланс по труду», выражаясь языком В.И.Данилова. Теперь можно продолжить осла-блять требования к дележу.

D-ядро получается тоже из основного определения (см. начало лекции), если под дележом понимать $x_N \in \mathbf{R}^N$ со следующим свойством: для него должен существовать сбалансированный набор $\{\lambda_S\}_{S \subset N}$, вместе с векторами выигрышей $x'_S \in V(S)$ такими, что $\forall i \in N$ будет $x^i_N = \sum\limits_{S \ni i} \lambda_S x^i_S$. Сбалансированность гарантирует то, что во всех случаях речь идёт именно о выпуклой комбинации.

D-ядро является уже достаточно широким множеством; внутри него естественно выделяется класс дележей, для которых никакой выпуклой комбинации брать не надо, потому что каждый игрок во всех коалициях, где он задействован ненулевое время, получает один и тот же выигрыш (привлекая интерпретацию, приведённую выше, представьте себе, что вы на всех работах получаете одну и ту же зарплату — это было бы забавно, не правда ли?). Ввиду важности этой концепции решения, приведу его определение подробно.

Определение. E-ядром называется множество всех пар (x, λ), где $x = x_N \in \mathbf{R}^N$, а $\lambda = \{\lambda_S\}_{S \subset N}$ — сбалансированный набор, удовлетворяющих следующим двум условиям:

Реализуемость: $\forall S: \ \lambda_S > 0 \quad x_S \in V(S)$, где x_S — проекция вектора выигрышей на коалицию S (см. выше). То есть, реально функционирующие коалиции должны обеспечивать своим членом предписанные вектором x выигрыши.

Ядерность: $\nexists S \subset N: \quad x_S \in int[V(S)]$. То есть, никакая вообще коалиция не может улучшить положение всех своих членов.

Теорема (Скарф 1967). Для любой игры с ограниченными сверху замкнутыми множествами $V(S)$ E-ядро непусто.

Доказательство состоит в применении теоремы Какутани.

Существует класс игр, которые достаточно хорошо изучены. А именно, это игры с побочными платежами, когда шкала измерения выигрышей у всех игроков одна и та же, и коалицию интересует лишь максимальный достижимый суммарный выигрыш. Точнее:

Определение. Игра с побочными платежами — это отображение

$$v : 2^N \to \mathbf{R}, v(\emptyset) = 0. \tag{4}$$

Иными словами, игра с побочными платежами представляет собой вектор в $2^N - 1$-мерном подпространстве векторов 2^N-мерного пространства, имеющих $\emptyset$-координату нулевой.

Упражнение. Супераддитивность такой игры сводится к требованию, что $\forall K, K' v(K \sqcup K') \geq v(K) + v(K')$, для непересекающихся коалиций $K, K' \subset N$.

Усилением, причём значительным, этого свойства служит свойство супермодулярности игры с побочными платежами.

Определение. Игра $v \in \mathbf{R}^{2^N}$ называется *супермодулярной*, если для любых $K, K' \in 2^N$ имеет место неравенство:

$$v(K \cup K') + v(K \cap K') \geq v(K) + v(K'). \tag{5}$$

Иными словами, игра супермодулярна, если соответствующая функция v является супермодулярной на решётке всех подмножеств. Пространство всех супермодулярных игр пока что не описано прямым способом (только двойственным).

Теорема (Шепли, 1953). Ядро супермодулярной игры непусто, и является многогранником с не более, чем $n!$ вершинами. Последние задаются с помощью простой процедуры: для каждого элемента из S_n игроки переставляются соответствующим образом, и один за другим входят в комнату, получая прирост выигрыша коалиции, который они своим появлением привносят.

Центральный элемент этого многогранника называется вектором Шепли. Его можно определить для любой игры, однако тогда он не обязан лежать в ядре.

Ядро может быть непусто и у не супермодулярной игры. Для игр с побочными платежами вообще имеется критерий непустоты ядра.

Теорема (Бондарева, 1963). Игра обладает непустым ядром в том и только в том случае, когда она em сбалансирована, то есть когда для любого сбалансированного набора $\{lambda_S\}_{S \subset N}$ имеет место неравенство

$$\sum_{S \subset N} \lambda_S v(S) \leq v(N). \tag{6}$$