Теория игр: лекция 2

Вопрос о существовании равновесия Нэша мы отложим на потом, а сейчас обсудим некоторые другие концепции решения игр в нормальной форме, связанные общей идеей о том, что игроки «рациональны» и правила игры являются «общим знанием». В дальнейшем мы за S_{-i} обозначаем $S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$, по аналогии с $s_{-i} \in S_{-i}$.

Определение. Стратегия $s_i \in S_i$ i-того игрока *доминируется* стратегией $s_i' \in S_i$, если $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ мы имеем $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i', s_{-i})$. Стратегия $s_i \in S_i$ называется *доминируемой*, если она доминируется какой-то стратегией $s_i' \in S_i$. (Заметим, что неравенства здесь — строгие!).

Если в некооперативной игре у некоторого игрока есть доминируемая стратегия, то по логике вещей он её не должен использовать никогда, независимо от того, какие у него ожидания относительно поведения остальных игроков. Но в таком случае, остальные игроки способны «осознать» это, и тогда возможность выбора игроком доминируемой стратегии вообще не принимается в рассчёт. Иными словами, стратегическое множество такого игрока сокращается на один элемент.

Любопытно понять, что в новой ситуации (фактически, в новой игре G^1) у некоторых игроков могут возникнуть новые доминируемые стратегии, за счёт того, что число требований на доминируемость сократилось. Соответственно, надо полагать, что и эти доминируемые стратегии второго уровня не будут игроками использоваться.

Будем теперь вычёркивать стратегию за стратегией, не заботясь о порядке. Оказывается, что порядок вычёркивания неважен. Точнее, верна следующая теорема:

Теорема. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — последовательные игры, связанные между собой так: каждая последующая игра характеризуется тем же набором игроков, тем же множеством исходов и теми же предпорядками, задающими предпочтения игроков на множестве исходов, и отличается только тем, что одно из стратегических множеств $S_i^k = S^{k-1} \setminus S_i'$, где S_i' — подмножество, состоящее из сильнодоминируемых стратегий. Правила игры получаются естественным ограничением исходной игровой формы f в новой ситуации.

Зададим теперь прямой индуктивный предел этой цепочки игр $\tilde{G}$, так что $\forall i \quad \tilde{S}_i = \cap_k S_i^k$. Тогда $\tilde{G}$ определён однозначно, т.е. является одним и тем же для всех таких последовательностей игр. Более того, можно считать, что индекс k пробегает произвольное индуктивно упорядоченное множество K, не обязательно N (и получится трансфинитный аналог этой теоремы).

Доказательство базируется на следующем замечании: будучи доминируемой, стратегия никогда не перестанет быть таковой. Остальное - рутина.

Результат последовательного вычёркивания (удаления) сильнодоминируемых стратегий обозначается за $\tilde{G}$, и называется *рационализацией* исходной игры G. Если же все стратегические множества игры $\tilde{G}$ одноэлементны, то полученный исход называется *итеративно-недоминируемым исхо-*

дом. Конечно, существует он не всегда; его существование равносильно разрешимости нашей игры, в классическом понимании этого термина.

Теорема. Множества равновесий Нэша игр G и $\tilde{G}$ совпадают.

Доказательство: в процессе одного шага доминирования, равновесие Нэша не может ни умереть, ни родиться.

Заметим, что почти вся эта теория не распространяется на исключение слабодоминируемых стратегий. Однако верно, что новые равновесия родиться не могут, поэтому множество равновесий Нэша у $\tilde{G}$ содержится в исходном, если исключать даже по слабому доминированию.

Приведём ещё одно определение, вводящее очень сильную концепцию решения игр. Прежде чем дать это определение, договоримся называть *коалицией* любое непустое подмножество $I \subset N$ множества игроков.

Определение. Сильным (Нэш-)равновесием называется профиль стратегий $s^* = \{s_i^*\}_{i \in N}$ такой, что

$$\nexists I \subset N, \quad \{s_i\}_{i \in I} : \forall i \in I f(\{s_i\}_{i \in I}; \{s_i^*\}_{i \notin I}) > f(s^*).$$

Иначе говоря, не существует никакой коалиции игроков, которая бы могла обеспечить своим членом больший выигрыш путём координированного отклонения от предписанных стратегий, если предполагать, что нечлены этой коалиции щёлкают клювом.

В случае конечной игры существование сильного равновесия упирается в существование решения у системы из $2^n - 1$ уравнений на n неизвестных, поэтому как правило сильного равновесия не существует. Однако известны целые классы игр, допускающие сильное равновесие; к этому вопросу мы ещё вернёмся в дальнейшем.