Существование равновесия Нэша

Теорема, которая будет доказана в этой лекции, утверждает существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях для любой конечной игры[1]

Теорема. Рассмотрим игру множества $N = \{1, \ldots, n\}$ игроков с функциями выигрыша, заданными отображением

$$u : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbf{R}^n,$$

где S_i — конечное множество чистых стратегий игрока $i = 1, \ldots, n$. Тогда существует набор смешанных стратегий

$$(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*),$$

являющийся равновесием Нэша в смещанном расширении этой игры (см. определение в предыдущей лекции).

Доказательство состоит из трёх этапов. Первый этап заключается в том, чтобы свести вопрос существования равновесия к вопросу существования неподвижной точки у некоторого многозначного отображения, и проанализировать свойства этого отображения. В конце концов будет установлено, что существование равновесия Нэша сводится к так называемой теореме Какутани о существовании неподвижной точки многозначного отображения.

Второй и третий этапы состоят в доказательстве теоремы Какутани. Второй этап - сведения теоремы Какутани к известной теореме Брауэра о существовании неподвижной точки у однозначного отображения. Третий этап состоит в доказательстве и обсуждении собственно теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Приступим к реализации намеченного плана. Для этого введём вспомогательные многозначные отображения *наилучшего ответа*, которые предписывают каждому игроку множество его оптимальных стратегий в ответ на фиксированный набор стратегий остальных игроков. Формально, $\forall \sigma_{-i} \in \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_{i-1}) \times \Delta(S_{i+1}) \times \cdots \times \Delta(S_n)$ определим

$$Best_i(\sigma_{-i}) := Argmax_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) := \{\sigma_i \in \Delta(S_i) : \forall \sigma_i' \in \Delta(S_i) u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})\}.$$

Таким образом, мы предлагаем игроку не какой-то один из его наилучших ответов на σ_{-i}, а *сразу все.* В этом и состояла гениальная догадка Джона Нэша, за которую он получил в 1994 году Нобелевскую премию по экономике.

Дальнейший анализ состоит в том, чтобы распространить на многозначные отображения стандартные понятия, формирующиеся вокруг свойства непрерывности. Дадим следующее определение (о других концепциях непрерывности многозначных отображений будет рассказано в отдельной главе, посвящённой целиком этому кругу вопросов):

Определение. Многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ топологических пространств называется *полунепрерывным сверху*, если его график $F = \{(x, y) : y \in F(x)\} \subset X \times Y$ представляет собой замкнутое подмножество прямого произведения области определения X на область значений Y.

[1]На самом деле, эта теорема относится к более общему классу игр, а именно когда у игроков выпуклые и компактные множества стратегий, и квазивогнутые по своей переменной (при этом непрерывные по чужим переменным) функции выигрыша.

При доказательстве теоремы Нэша нам пригодится следующая лемма:

Лемма. Пусть есть несколько компактных топологических пространств $X_1, \ldots, X_n$ и «перекрёстные» многозначные отображения $F_i : X_{-i} \rightrightarrows X_i$, где под X_{-i} понимается прямое произведение всех пространств, кроме X_i. Тогда, если каждое из отображений F_i является полунепрерывным сверху, то этим же свойством будет обладать их *композит*

$$F : X_1 \ldots X_n \rightrightarrows X_1 \ldots X_n,$$

определённый по правилу $F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_{-1}) \times \cdots \times F_n(x_{-n})$. Здесь x_{-i} обозначает $(n-1)$-набор, полученный выбрасыванием из набора $(x_1, \ldots, x_n)$ компоненты x_i.

Доказательство этой леммы предоставляется слушателям. Надо просто представить график композита в виде образа компакта при композиции нескольких непрерывных отображений типа вложений, прямых домножений на тождественные и т.п. От компактности, вообще говоря, отказаться нельзя, но это и не нужно делать.

Следующее утверждение является следствием общего анализа максимизационных задач с параметром (так называемой «сравнительной статики»), которая будет предметом отдельной главы.

Утверждение. Отображение $Best_i$ является полунепрерывным сверху.

Как следствие, полунепрерывным сверху будет и отображение

$$Best : \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n) \rightrightarrows \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n),$$

являющееся, по определению, композитом отображений $Best_i$. Следующее утверждение является простой переформулировкой понятия равновесия Нэша в терминах неподвижных точек.

Утверждение. Набор $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда $\sigma^* \in Best(\sigma^*)$, то есть когда σ^* является неподвижной точкой многозначного отображения $Best$.

Продолжаем изучать свойства многозначного отображения $Best$, а также его составляющих компонент $Best_i$. Следующая характеристика отображения $Best_i$ является ключевой при доказательстве теоремы Нэша.

Теорема об устройстве отображения $Best_i$.

$$Best_i(\sigma_{-i}) = \Delta(Arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})).$$

Иными словами утверждается, что множество наилучших ответов на фиксированный профиль смешанных стратегий других игроков состоит из всевозможных смесей в любых пропорциях тех чистых стратегий, которые максимизируют выигрыш игрока i, в ответ на рассматриваемый профиль стратегий остальных. Оно и понятно, особенно после этой словесной переформулировки: ведь функция выигрыша линейна (аффинна) по собственным коэффициентам смеси!

Подспудно, стало ясно устройство $Best_i$: его образы являются симплексами — различными гранями исходного симплекса всех смешанных стратегий игрока i (возможно, гранью нулевого порядка, являющейся самим этим симплексом, или напротив одной его вершиной. Последний случай кажется случаем общего положения, однако *среди равновесий* это уже не будет иметь место.). Что же касается отображения $Best$, то оно выпукло-компактно-значно, потому что его образы — прямые произведения нескольких симплексов.

Суммируя, мы видим, что вопрос существования равновесия Нэша свёлся целиком к следующей теореме, доказанной в 1944 году итальянским математиком Какутани, сбежавшим от фашистского режима в США и там открывшим этот фундаментальнейший для всей математической экономики факт.

Теорема Какутани. Пусть $X \subset \mathbf{R}^M$ — выпуклый компакт, лежащий в конечномерном пространстве, а $F : X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение, полунепрерывное сверху и выпукло-компактно-значное (то есть, $\forall x \in X \, F(x) \subset X$ — выпуклый компакт. Тогда существует неподвижная точка отображения F, то есть такая точка $x^* \in X$, что $x^* \in F(x^*)$.

Доказательство этой теоремы отложим до следующей лекции.