Теоремы Какутани и Брауэра

Теорема Какутани, лежащая в основе теоремы Нэша, одновременно обслуживает множество фундаментальных теорем о существовании равновесий в математической экономике. Сюда относятся теорема о существовании равновесия в экономике обмена, существование правильно понятой концепции равновесия в кооперативной игре, и многие другие факты. Напомним её.

Теорема Какутани. Пусть $X \subset \mathbf{R}^M$ — выпуклый компакт, лежащий в конечномерном пространстве, а $F : X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение, полунепрерывное сверху и выпукло-компактно-значное (то есть, $\forall x \in X\; F(x) \subset X$ — выпуклый компакт. Тогда существует неподвижная точка отображения F, то есть такая точка $x^* \in X$, что $x^* \in F(x^*)$.

Доказательство этой теоремы состоит в сведении её к теореме Брауэра:

Теорема Брауэра. Пусть $X \subset \mathbf{R}^M$ — выпуклый компакт, лежащий в конечномерном пространстве, а $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Тогда существует неподвижная точка отображения f, то есть такая точка $x^* \in X$, что $x^* = f(x^*)$.

Теорема Брауэра сама по себе представляет огромный практический и теоретический интерес, обеспечивая существование решений у различного рода систем уравнений. Существует множество (десятки, сотни....) доказательств теоремы Брауэра. Я приведу наиболее, на мой взгляд, краткое (за остальными отсылаю читателей к ....). Прежде всего заметим, что неважно, какой именно выпуклый компакт имеется в виду — все они гомеоморфны между собой. Пусть же это будет шар.

Рассуждаем от противного: пусть неподвижной точки нет. Тогда строим новое отображение $g : X \to X$ нашего шара в себя, сопоставляя точке $x \in X$ точку пересечения луча $[f(x), x \to)$ с границей шара. Это отображение является *ретракцией*, то есть, постоянно на границе, а всю внутренность шара размазывает по границе.

Упражнение. Отображение g — непрерывная ретракция.

Кто в детстве страдал ерундойй с мыльными плёнками, тот уже понимает, что никакой непрерывной ретракции шара на границу быть не может. Для остальных же завершу доказательство следующим образом.

Распишем g покоординатно: $g = (g_1, \dots, g_M)$. Теперь образуем $(M-1)$-форму $\omega = g_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_M$. Так как на границе шара отображение постоянно, то при ограничении на $T(\partial X)$ эта форма тождественно совпадёт с формой $\sigma = x_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_M$.

Заметим теперь, что $d\sigma$ является формой объёма. Применим формулу Стокса: $\int\limits_X d\mu = \int\limits_{\partial X} \mu$, верную для любой $M-1$-формы μ. Получим:

$$Vol(X) = \int\limits_X d\sigma = \int\limits_{\partial X} \sigma = \int\limits_{\partial X} \omega = \int\limits_X d\omega = 0, \tag{1}$$

так как $d\omega = dg_1 \wedge \dots \wedge dg_M \equiv 0$ на X (в силу падения ранга на единицу). Получили, что объём шара равен нулю — противоречие.

Тонкий глаз заметит недочёт: беря дифференциалы, мы полагаем функции гладкими. Впрочем, с помощью теоремы Веерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций несложно залатать этот пробел (сами латайте).

Перейдём теперь собственно к теореме Какутани. Идея её доказательства состоит в том, чтобы «вписать» в график многозначного отображения всё более тонкие однозначные приближения. Точнее, надо построить кусочно-линейную серию приближений к графику отображения F.

Для осуществления этой затеи введём в рассмотрение *разбиение единицы*. Это такой набор вещественнозначных неотрицательных функций на X, сумма которых тождественно равна единице, — эдакая «плавающая» линейная комбинация, меняющаяся от точки к точке. Если функций L, то можно трактовать разбиение единицы как непрерывное отображение $\phi : X \to \delta_L$ нашего выпуклого компакта в $L-1$-мерный симплекс всех вероятностных распределений на L точках.

Идея заключается в том, чтобы покрыть X сколь угодно густой конечной ϵ-сетью $x_1, \ldots, x_L$ (L растёт с ростом ϵ), и создать разбиение единицы, приуроченное к этой сети:

$$\phi_i(x) = \max\{\epsilon - |x - x_i|, 0\}, \quad i = 1, \ldots, L. \tag{2}$$

Заметим, что действие функции ϕ_i не распространяется далее ϵ-окрестности x_i ($supp\varphi_i \subset O_\epsilon(x_i)$). На самом деле, это ещё не разбиение единицы; чтобы получить разбиение, надо пронормировать эти функции, поделив каждую на их сумму (она всюду положительна, по определению ϵ-сети). Считаем, что мы это уже сделали.

Теперь строим наше аппроксимирующее отображение $f_\epsilon : X \to X$ следующим образом. Выберем по одной точке $y_i \in F(x_i)$, и определяем

$$f_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{L} \phi_i(x) y_i. \tag{3}$$

Будучи непрерывной, f_ϵ имеет неподвижную точку x^*_ϵ.

Теперь, беря предельную точку у последовательности $x^*_{1/l}$, обозначаем её за x^*, и доказываем, что она и есть неподвижная точка многозначного отображения F.

Упражнение. Доведите доказательство теоремы Какутани до конца. (Указание: это не совсем тривиально, если не получится — не огорчайтесь!)