Супермодулярные игры

В последней четверти XX века на свет родилась и оформилась новая наука, в какой-то мере являющаяся заменой математического анализа в вопросах, касающихся свойств монотонности (вместо непрерывности). Отцами-основателями этой науки были Тарский, Биркгофф, Кнастер и другие люди, формализовавшие ещё раньше (во второй четверти XX века) понятие решётки и полной решётки, и установившие для решеток аналог теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Однако они вряд ли догадывались о том невообразимом буме, который последует полвека спустя: без преувеличения можно сказать, что весь современный (мат-)экономический мир оперирует понятиями и методами теории решёток и супермодулярных функций на них. Теория игр не избежала этой участи: в 80-х годах Топкис, Милгром, Робертс и другие великие умы экономического мира взялись за дело, и написали теорию супермодулярных игр.

Для полноты картины я предлагаю здесь замкнутое введение в теорию решёток и супермодулярных функций на них, переходя затем собственно к теории игр. Так как многие теоремы, судя по всему, в русскоязычной литературе появляются здесь впервые, я оставляю за собой право ввести собственную терминологию. Более-менее, эта лекция является переводом основополагающей статьи Милгрома и Шаннона 1994 "Monotone comparative statics". Я подчёркиваю тесную аналогию со стандартным матаном везде, где это возможно.

Определение. Частично упорядоченное множество $X, \succeq$ называется *решёткой*, если для любой пары $x, y \in X$ существуют точная верхняя и точная нижняя грани. (Точной верхней гранью элементов x, y упорядоченного множества называется такой z, что $z \succeq x, y$ и для любого $z' \succeq x, y$ выполняется $z' \succeq z$. Аналогично определяется и точная нижняя грань.) Обозначается точная верхняя грань за $x \vee y$, а точная нижняя грань — за $x \wedge y$, и называются они в теории решёток, соответственно, «верхом» и «низом». Решётка называется полной, если не только для любой пары элементов, но и для любого подмножества $Y \subset X$ существуют верх и низ (в случае подмножеств, чаще используются обозначения $supY$ для верха, и $infY$ для низа). Аналогом полной решётки в матане служит, в зависимости от контекста, либо просто компакт, либо выпуклый компакт.

Следующие три определения вбивают три гвоздя в каркас новой теории. Они относятся к разному времени, а здесь должны быть собраны воедино.

Определение 1. Функция $f : X \to \mathbf{R}$, определённая на решётке,
называется *супермодулярной*, если $\forall x, y \in X$ выполнено

$$f(x) + f(y) \leq f(x \wedge y) + f(x \vee y). \tag{1}$$

Функция называется квази-супермодулярной, если требуется

$$f(x) \geq f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \vee y) \geq f(y). \tag{2}$$

(Квази-)супермодулярность является ординальным эквивалентом (ну, или хотя бы аналогом) свойства выпуклости, вводимого в непрерывную теорию для исследования свойств монотонности. Просто только недавно стало ясно: непрерывность тут ни при чём.

В теории кооперативных игр естественным образом возникнут функции на булевой решётке 2^N всех подмножеств данного множества N, упорядоченной по включению. Можно интерпретировать эту булеву решётку как куб в $\mathbf{R}^N$, точнее, как множество его вершин, упорядоченное стандартным образом как подмножество упорядоченного $\mathbf{R}^N$: $x \preceq y \Leftrightarrow \forall i\ x_i \leq y_i$. Так вот, особую роль в кооперативной теории игр будут играть именно супермодулярные функции на булевой решётке. Изюминка состоит в том, что множество всех таких функций до сих пор не описано по-человечески. Это — важная нерешённая проблема в теории игр.

Определение 2. Пусть X — решётка, а T — просто частично-упорядоченное множество. Функция $f : X \times T \to \mathbf{R}$ называется *полумонотонной* по паре (x, t) (по-английски: function with increasing differences), если при $x' \succeq x, \quad t' \succeq t$ функция

$$f(x', t) - f(x, t) \tag{3}$$

является неубывающей по t, и квази-полумонотонной, если

$$\begin{aligned} f(x', t) \geq f(x, t) \Rightarrow f(x', t') \geq f(x, t'); \\ f(x', t) > f(x, t) \Rightarrow f(x', t') > f(x, t'). \end{aligned} \tag{4}$$

Интерпретация здесь такова, что увеличение «параметра» влечёт большее стремление увеличить и переменную выбора (эта интерпретация понятна и знакома экономистам, но не математикам). По-английски это называется: function satisfying single crossing property.

Определение 3. Функция $f : X \to \mathbf{R}$, определённая на решётке X, называется *порядково полунепрерывной сверху* (order upper hemiconinous, OUHC), если для любой цепи $C \subset X \quad f(supC) \geq supf(C), \quad f(infC) \geq inff(C)$. Оказывается, что именно этого свойства надо требовать для того, чтобы функция достигала максимума на любой полной подрешётке. (Аналогом в матане является теорема о достижении максимума непрерывной функции на компакте; её тоже можно ослабить, там на самом деле *для максимума* нужна только верхняя полунепрерывность.)

Далее следуют теоремы, доказанные Тарским, Топкисом, Милгромом и Шаннон.

Теорема 1 (Топкис, где-то 1970). Любая OUHC-функция достигает максимума на любой полной решётке.

Теорема 2 (Тарский, Кнастер, Биркгоф, около 1950). Множество неподвижных точек монотонной трансформации полной решётки само образует (непустую) полную решётку, являющуюся подрешёткой в исходной (быть может, с дырами).

Аналогом этой теоремы, конечно, является теорема Брауэра; устройство множества непрерывных точек как компакта в непрерывной теории очевидно, и тут-то тоже речь идёт о «дырах», ибо выпуклость мы потеряли.

Аналог теоремы Какутани тоже имеется, и он элементарен. Для того, чтобы его сформулировать, надо ввести порядок на множестве всех подмножеств решётки. А именно, мы говорим, что подмножество Y "выше" подмножества Z, если для любой пары $y \in Y, z \in Z$ имеем $y \vee z \in Y, \quad y \wedge z \in Z$. Обозначение: $Y \succeq_s Z$. Так вот:

Теорема 3. Если $f : X \rightrightarrows X$ — многозначное монотонное отображение полной решётки в себя (монотонность означает, что индуцированное однозначное отображение $\hat{f} : X \to 2^X$ является монотонным относительно введённого порядка высоты на множестве всех подмножеств), которое полно-решётчато-значное, то существует неподвижная точка. (Доказательство немедленно следует из теоремы Тарского; сравните с непрерывным случаем, где от Брауэра до Какутани семь тысяч вёрст!)

Аналог теоремы об аргмаксимуме из непрерывной теории максимизации принимает форму критерия, в отличие от своего собрата. А именно, верно следующее утверждение:

Теорема 4 (Милгром, Шаннон 1994). Пусть X — решётка, T — частично-упорядоченное множество, $f : X \times T \to \mathbf{R}$. Тогда условие монотонности многозначной функции $Argmax(Y, t)$ по паре аргументов (подмножество, на котором берётся максимум; внешний параметр) эквивалентно тому, что f квази-полумонотонна по пар (x, t) и квази-супермодулярна по переменной выбора, x.

Что же касается некооперативной теории игр, то здесь ситуация ещё более захватывающая. А именно, рассмотрим игру со следующими свойствами.

1. Все стратегические множества игроков являются полными решётками. 2. Функции выигрыша OUHC по своей координате, и квази-полумонотонны по паре (своя координата, чужая координата).

Тогда существуют профили стратегий s^* и s_*, являющиеся, соответственно, минимальным и максимальным серийно недоминируемыми профилями (см. первую лекицю). Далее, множество равновесий Нэша в чистых стратегиях (а) непусто (б) является полной решёткой (с) имеет максимум и минимум как раз в этих двух профилях.

Типичной супермодулярной игрой является игра "маршрутки-автобусы" (додумайте сами).