До сих пор мы изучали одновременные игры, т.е. игры, разыгрываемые один раз, при полной неинформированности игроков относительно выбранных партнёрами стратегий. Мы переходим теперь к анализу таких игровых ситуаций, когда информация в течение игры обновляется, открываясь игрокам в определённом объёме. Такие игры называют *играми в развёрнутой форме*, и их общее определение и анализ будут предметом будущих лекций; здесь же мы рассмотрим, в некотором смысле, предельный случай таких игр, а именно, *игры с совершенной информацией*, когда игроки делают ходы строго последовательно друг за другом (хоть и в произвольном порядке).

Примеры таких игр знакомы нам с ранних лет. Каждый из нас в детстве играл в крестики-нолики, шахматы, камушки и т.д. Те, кто ходили на кружки в матшколы, также решали множество задач типа «кто выиграет при правильной игре». Как мы видели, понятие выигрышной стратегии редко имеет смысл в одновременных играх, где главную роль играет равновесие по Нэшу. В играх же с совершенной информацией хочется верить, что «выигрышная стратегия» должна существовать, по крайней мере для двух игроков «в конечном случае»[1]. В данной лекции понятие «конечного случая» и «выигрышной стратегии» будет формализовано, и существование выигрышной стратегии у одного из двух игроков будет строго доказано. Соответствующая теорема, в сущности, имеет возраст около 100 лет, и связывается с именем Цермело.

Игры, в которых выигрышная стратегия существует у одного из игроков, называются *детерминированными*. Мы выделяем достаточно широкий класс таких игр, называя их «детскими играми», следуя традиции, возникшей несколько лет назад в Российской Экономической Школе.

Как ни странно, на примере даже самых простых игр можно прочувствовать один из основных принципов теории игр в развёрнутой форме — решение «с конца», или обратная индукция, который в сущности ничем не отличается от принципа Беллмана в динамическом программировании. Приведём один пример.

Задача 1. Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. Ходят по очереди. В свой ход игрок имеет право безвозвратно забрать из кучи число камней, равное любой степени двойки (1,2,4,8,... камней). Выигрывает тот, кто заберёт последний камень. Кто выиграет при правильной игре — тот, кто ходит первым или второй? Как надо играть?

Для решения этой задачи мы введём в рассмотрение целое семейство задач, параметризованное числами натурального ряда. А именно, для любого N зададимся тем же вопросом: кто выигрывает при правильной игре, и как надо ему для этого играть.

При $N = 0$ первый сразу проиграл, безо всякой игры. При $N = 2^k, k = 1, 2, 3, ...$ первый может выиграть, просто забрав все камни, так как *после его хода* второй окажется в ситуации, когда надо ходить, а камней нет — а такую ситуацию мы уже рассмотрели. Далее, если N таково, что *любой* ход первого приводит к количеству камней, равному 2^k, то первый заведомо проиграл, ибо второй может выиграть при правильной игре.

[1]Примером игры двух лиц с совершенной информацией, в которой ни у одного игрока нет выигрышной стратегии, является игра попадания в фиксированное множество на прямой. А именно, двое ходят по очереди, называя очередной разряд двоичной записи числа. Первый выиграет, если число окажется внутри множества A; второй — в противном случае. Оказывается, для «нигде не измеримых множеств» A выигрышной стратегии не существует ни у первого, ни у второго игрока.

Такое N, правда, только одно: $N = 3$, но заметим, что мы уже решили задачу по крайней мере для $N = 1, 2, 3, 4$.

Продолжая в том же смысле, мы будем шаг за шагом расширять наши знания о том, при каких N ходящий первым выиграет, а при каких — проиграет. Принцип, которым мы руководствуемся, таков:

- Если из данного состояния, характеризующегося числом камней N в кучке, найдётся ход, ведущий в проигрышную позицию, то рассматриваемое состояние — выигрышное. Если же все ходы ведут в выигрышные позиции, то состояние, наоборот, проигрышное.

Упражнение. Дорешайте эту задачу до конца. Угадав закономерность, докажите её непосредственно.

Аналогичным способом могут быть решены многие похожие задачи. Выигрышная стратегия в таких случаях строится тоже по индукции — она состоит в том, чтобы в любой выигрышной позиции осуществлять ход в проигрышную, а в проигрышной позиции можно выбрать любой ход. Тогда такая стратегия сгодится для всех выигрышных позиций в нашей игре, или более точно, в рассматриваемом семействе игр. Как правило, закономерность угадывается, и тогда нужно лишь доказать её по индукции. Однако не всегда всё так просто и прозрачно.

Задача. «Гексагон», или игра Земля-Вода. На плоскости, подвергнутой гексагональному разбиению (см. рис. 1), вычленен ромб размера n на n. Две армии... В этой игре можно доказать, что выигрывает первый, однако науке неизвестна выигрышная стратегия!

Попробуем формализовать введённые выше понятия детской игры, стратегии и выигрышной стратегии. Рассмотрим некое множество X (*позиций*), конечное множество N *игроков*, и множество S (*исходов игры*). Образуем *фазовое пространство* $F = N \times X$, элемент которого — *фазовое состояние* — отвечают позиции, в которой находится игра, вместе с указанием того, кто из игроков в данный момент ходит. Задание на множестве X *структуры игры* предусматривает задание на фазовом пространстве F *отношения перехода* $A \subset F \times F$, которое интерпретируется следующим образом: $[(n, x), (n', x')] \in F \Leftrightarrow$ игрок n может сделать ход из позиции x в позицию x', передав при этом ход игроку n'. *Профилем стратегий* в игре называется любое однозначное отображение $f : F \to F$, вписанное в соответствие A, т.е. $\forall (x, n) \in F \quad f(x, n) \in F(x, n)$. *Стратегией* игрока n называется n-я компонента отображения f. Если задан профиль стратегий и начальное состояние, то можно проследить, куда он приведёт, и понять, что

(1) Либо он уйдёт на бесконечность, (2) Либо он зациклится, (3) Либо он приведёт в точку, движение из которой невозможно. В этом случае говорят, что игра закончилась.

Последнее требует пояснения. Множество фазовых точек $T = (x, n) : F(x, n) = \emptyset$ называется множеством терминальных состояний, или концовок игры. Для любой концовки задан порядок на множестве игроков $\pi \in S_n$, определяющий, кто победил, кто — на втором месте и т.п. *Выигрышной стратегией* игрока в данном фазовом состоянии называется такая стратегия, что независимо от выбора стратегий остальными игроками игра (а) закончится (б) данный игрок победит.

На игру накладываются условия, чтоб она всегда кончалась. А именно:

Определение. Игра называется детской, если множество X является фундированным, а правила игры таковы, что из любой позиции ведут только в строго низлежащие.

Тогда, конечно, игра закончится. И если игроков всего два, то верен следующий фундаментальный факт:

Теорема Цермело. Если игра детская, а игроков два, то существует пара стратегий (f_1, f_2) такая, что для любого фазового состояния либо f_1 выигрышная у первого игрока, либо f_2 — у второго.

Следует вдуматься в эту теорему, чтобы понять: все детские игры полностью решены. А именно, надо найти пару выигрышных стратегий, и тупо, как попугаи, применять их, независимо от того, в каком состоянии игра находится. Короче, детские игры все эквивалентны «игре в пьяницу». Любопытно, что и для шахмат это верно (после надлежащего обобщения понятия исхода игры, чтобы допустить ничейный исход и «ничейную стратегию»).