Игры в развёрнутой форме: определения и аксиома Куна

Теперь мы переходим к анализу класса игр, в которых информация вскрывается по ходу игры совершенно произвольным образом. Формализация этого класса игр является делом непростым, но зато практические все жизненные ситуации, которые требуют строгого анализа и прогноза действий участников, могут быть успешно формализованы и изучены в рамках этого подхода. Игры в нормальной форме, а также детские игры — все они могут быть представлены в виде игры в развёрнутой форме. В этом проявляется определённая универсальность предлагаемого подхода в теории некооперативных игр.

Начинается задание игры в развёрнутой форме, конечно, с указания множества N игроков. Условимся, во избежание ненужных осложнений, считать множество N конечным.

Далее, задаётся так называемое *дерево игры* — это конечное дерево с отмеченной вершиной (следовательно, можно считать его ориентированным). Обозначим за A множество вершин дерева (оно конечное), за $a_0 \in A$ — отмеченную вершину, и за $M \subset A \times A$ — множество его рёбер. Ориентировку множества рёбер введём очевидным образом: если a_1 и a_2 соединены ребром, то $(a_1, a_2) \in M \leftrightarrow$ (единственный) путь из вершины a_0 в вершину a_2 пролегает через вершину a_1, а не наоборот.

Введём порядок на множестве A вершин дерева, считая, что a *выше* b, если (единственный) путь из вершины a_0 в вершину b проходит через вершину a. (В частности, для любого ребра $(a_1, a_2) \in M$ имеем, что a_1 выше a_2.)

Множество самых низких вершин дерева (относительно введённого порядка) называется множеством *терминальных вершин*, и обозначается за T. Все остальные вершины разбиваются на непересекающиеся классы:

$$A \setminus T = A_0 \sqcup \{\sqcup_{i \in N} A_i\}, \tag{1}$$

и интерпретируется это так: i-й игрок делает ход в вершинах $a \in A_i$ (или «контролирует»эти вершины). В вершинах множества A_0 «ходит» природа; чуть позже это станет ясно. Вовсе не обязательно, что отмеченная вершина контролируется природой, хотя на практике такое бывает достаточно часто (в 50 процентах случаев).

Что значит «делает ход»? Это означает, что игрок i, оказавшись в вершине $a \in A_i$, выбирает одну из стрелочек (т.е. направленных рёбер), исходящих из этой вершины: $(a, b) \in M$, и передаёт ход игроку, который контролирует вершину b. Природа тоже «выбирает» одну из стрелочек, исходящих из вершины $a \in A_0$, однако в случае хода природы изначально заданы вероятности различных ходов (т.е. вероятностное распределение на множестве стрелок, исходящих из такой вершины). Множество стрелок, исходящих из данной верщины $a \in A$, обозначается за $M_a = \{(a, b)\} \in M$. Фактически, это образ многозначного отображения M в точке a.

Что касается множества T терминальных вершин, то для каждой из них указаны выигрыши игроков, то есть, в задание игры в развёрнутой форме входит отображение

$$u : T \to \mathbf{R}^N. \tag{2}$$

Если бы на этом дело кончалось, то теория игр в развёрнутой форме была бы вся целиком лёгким упражнением, а многие жизненно важные сценарии оказались бы за бортом. Потому что в том виде, как игра до сих пор сформулирована, нет места неопределённости, скрытой информации, которая в сущности и наполняет смыслом весь теоретико-игровой анализ решений. Поэтому придётся продолжить (уточнить) наше описание игры.

А именно, учёт неопределённости состоит в том, что некоторые вершины дерева неразличимы с точки зрения контролирующего их игрока. Таким образом, сразу же введём для каждого из игроков разбиение $A_i = A_{i1} \sqcup \ldots A_{il_i}$ множества контролируемых им вершин на непересекающиеся *нифoрмационные множества*, внутри каждого из которых игрок i не может установить, где же конкретно он в данный момент находится и принимает решение. Разумеется, это разбиение должно удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, чтобы исключить ситуацию, когда игрок — идиот (если из разных вершин одного и того же инфо-множества исходит неодинаковое число стрелочек), или когда он пьян (игра в «пьяного шофёра») либо страдает дефектом памяти, забывая, ходил ли он вообще, или как именно он ходил, или просто информацию по ходу игры, которую он когда-либо узнал.

Чтобы формализовать высказанные требования, будем следовать подходу великого математика Куна (который в паре с Такером устанавливал разные свойства экстремальных задач). А именно, введём следующие два условия, которые завершат наше описание игры в развёрнутой форме:

Условие 1: для каждого инфо-множества A_{ij} задано множество *ходов* в нём, M_{ij}, вместе с фиксированными биекциями $M_{ij} \Leftrightarrow M_a$ для любого $a \in A_{ij}$; иными словами, с точки зрения игрока i, ситуация во всех вершинах информационного множества выглядит идентичной.

Условие 2 (собственно, аксиома Куна): для любого инфо-множества A_{ij} любого игрока i, и для любых двух точек $a, b \in A_{ij}$, и любой вершины x того же игрока i, предшествующей вершине a, должна существовать вершина y игрока i, находящаяся вместе с x в одном и том же инфо-множестве (возможно, просто-напросто с x-ом совпадающая), которая посредством *того же самого* хода предшествует вершине b. Запутано, но зато универсально: ниже будет продемонстрировано, что это условие адекватно формализует игры с «совершенной памятью».

Чтобы пояснить это, подумаем, что надо называть стратегией игрока. Явно, стратегическим множеством надо назвать $S_i = \cup_{j=1}^{l_j} M_{ij}$. То есть, стратегия представляет собой «план действий», на все возможные случаи жизни. Но тогда вопрос: что же такое смешанная стратегия? Видимо, элемент симплекса $\delta(S_i)$, как обычно. Но это множество великовато! Посмотрите хотя бы на его размерность. Да и маловероятно это, чтобы вероятностью снабжался каждый конкретный план действий. (Интерпретация Данилова с библиотеками.) Скорее, смешанной стратегией следовало бы считать результат смеси ходов в каждом из инфо-множеств, т.е. множество смешанных стратегий должно быть $\cup_{j=1}^{l_j} \delta(M_{ij})$, имеющая куда меньшую размерность, нежели $\delta(S_I) = \delta(\cup_{j=1}^{l_j} M_{ij})$.

Чтобы внести ясность,заметим, что любой из двух разных видов смешения, даже если виды смешения у разных игроков различны, приведёт к однозначному исходу игры, после фиксации того или иного типа смешанных стратегий у игроков. Назовём же две стратегии (независимо от их типа) *эквивалентными*, если при любых выборах стратегий остальными игроками платежи всем игрокам без исключения будут одинаковы. Назовём теперь *поведенческой стратегией* смешанную стратегию в более экономном смысле слова. Тогда:

Теорема Куна. Если аксиома Куна выполнена, то для любой смешанной стратегии любого игрока существует поведенческая стратегия, эквивалентная ей.

Можно и непосредственно установить соответствие, реализующее эту эквивалентность (упражнение). Впоследствии мы будем работать только с поведенчемкими стратегиями.