Развёрнутые игры: равновесия и нестандартный анализ

Выход из тупика, в который мы зашли в конце прошлой лекции, состоит в том, чтобы правильно осознать и переосмыслить понятие решения игры, смешанной стратегии и вообще числа как такового. Я намекаю на то, что с целью сведения воедино всех наших требований к концепции решения игры придётся привлечь аппарат (и даже идеологию) нестандартного анализа, т.е. анализа, допускающего бесконечно малые величины как существующие «на самом деле».

Нестандартному анализу и его главенствующей роли в равновесных экономических моделях меня научил д.ф-м.н. Валерий Михайлович Маракулин (Новосибирск, Институт математики им. Соболева СО РАН). Пользуюсь случаем выразить ему свои искренние признание и благодарность. Подход, изложенный ниже, разработан в паре с другим замечательным учёным из Новосибирска, Сергеем Гелиевичем Коковиным, и обсуждён при участии Валерия Маракулина и Евгения Желободько в течение самого счастливого полугодия в моей жизни, проведённого в Академгородке Новосибирска. Вообще, хочу отметить роль этой моей стажировки в осмыслении теории игр, а также передать на страницах этих лекций всем коллегам-новосибирцам мой пламенный привет! Фактически, эта лекция написана в паре с Сергеем Коковиным.

Главный постулат, с которого начнём, состоит в следующем: на свете не бывает нулевых вероятностей. Если вы используете одну из своих стратегий с нулевой вероятностью, то это означает, что вам она не нравится — но тогда вы должны знать её вкус, т.е. вы её когда-то попробовали. Так или иначе, если стрелка нарисована, то по ней иногда, хотя возможно и крайне редко, кто-нибудь да ходит. Поэтому *любая вершина дерева игры может, в принципе, быть достигнута* и игрок, который её контролирует, должен иметь план действий на тот случай, если он в эту вершину попадёт. Формализацией этого тезиса мы и займёмся ниже.

Однако, прежде чем говорить об играх в развёрнутой форме и их решениях, я расскажу предысторию: (Савватеев, Коковин 2003)

«В 1948 году, на заре теории игр ее отцы-основатели Дж. фон Нейман и О.Моргенштерн выдвинули исследовательскую программу конструирования понятий игровых решений, адекватных идее рационального поведения. Одна из сторон этого вопроса: можно ли адекватно разрешать динамические игры через их нормальную форму, то есть, каково соотношение между стратегическим и ситуативным (оппортунистическим) поведением? Многочисленные последующие изыскания последовательно сужали (refinements) “приемлемое” множество решений, выделяя из равновесий Нэша в нормальном представлении игры – только те равновесия, которые кажутся *естественными* и в развернутом представлении, при разумных взглядах на разумность игроков (рациональность). Мы предлагаем очередное сужение, продолжающее линию Байесовского равновесия, секвенциального равновесия, и равновесия дрожащей руки, и кажется, подводящее итог этой линии. Мотивацию этого подхода начнем с содержательной стороны и обычных понятий, всюду далее подразумевая под “игрой” смешанное расширение конечной динамической некооперативной игры с неполной, возможно, информацией.

Один из подходов к вопросу, предложенный Куном (?? в ??) под названием Сложного равновесия - это разрешение нормальной формы по слабому итерационному доминированию. При условии несовпадения выигрышей каждого игрока в различных исходах (или заменяющем его чуть более мягком условии) это приводит к единственному по выигрышам исходу и совпадает с результатом обратной индукции, то есть с Совершенным в подыграх равновесием, что вызывает удовлетворение. Если бы не слишком жесткое условие несовпадения выигрышей, этим можно бы и удовлетвориться. Но в смешанном расширении игры оно мало правдоподобно.

Не касаясь пока секвенциального равновесия, начнем обсуждение с наиболее сильного сужения множества решений - 'равновесия дрожащей руки', уже удачно сопоставляющего нормальную и развернутую формы игры. Все же, эта концепция имеет недостаток, который и мотивирует дальнейшее сужение.

"(Нэшевское) равновесие дрожащей руки" (THNE) - это такое равновесие Нэша, что существует сходящаяся к нему вполне смешанная последовательность стратегий (где нет неиспользуемых стратегий), ответом на все члены которой и является это равновесие Нэша.

Вникнем в содержательное обоснование этой идеи. Пожалуй, наиболее убедительная трактовка THNE, как и обычного равновесия Нэша - эволюционная, или "популяционная".[1] Подразумевается, что перед данным розыгрышем была *предыстория* таких же игр, разыгранных целой популяцией таких же участников. Скажем, садясь в такси, и думая, поторговаться ли о цене, я представляю себе *обычный* ход и исход игры торга между пассажиром и таксистом в этом городе. Так что, *ожидания* (веры) теперешних игроков о намечаемых стратегиях их партнеров взяты именно из предыстории (иначе трудно обосновать знание текущих стратегий партнеров в концепции Нэша и других). Наиболее адекватны эволюционной трактовке именно смешанные стратегии: 'в среднем', *обычно*, мои партнеры, или их подобные им люди в их роли, ходят вот так, а не иначе.

Концепция THNE, адекватно эксплуатирует эту популяционную идею. Она снимает проблемы концепции Нэша в отношении неприменяемых обычно стратегий (вне пути игры), и заодно отбрасывает слабо-доминируемые стратегии. Можно понимать ее так: в предыстории у каждого игрока были "затмения", то есть моменты (не-рационального) применения *каждой* из его стратегий. А его партнеры рационально реагировали в этих ситуациях. Понемногу иррациональность сошла на нет, и образовалось теперешнее THNE. То есть, все пути игры когда-то наблюдались, и теперешние ожидания или веры появились из наблюдений рациональных реакций на все ходы, даже на иррациональные.

Но еще один концептуальный вопрос остается. В предыстории, сформировавшей мои теперешние представления о моих партнерах, *вели ли себя игроки, делающие "случайный ход", хотя бы отчасти рационально?*

Произвольность этой предыстории (вполне-смешанной последовательности, сходящейся к нынешнему равновесию) вызывает смутную неудовлетворенность, но не сразу ясно, в каких терминах ее выразить. Мы сделаем это так. Можно предполагать, что 'дрожание руки', то есть иррациональность игроков в ходе предыстории проявлялась специфическим образом. А именно, в силу каких-то причин, возможно – недостаточ-

[1] Лучше "популяционная", чтобы не путать эту тему с темой "эволюционные игры", занимающейся эволюционно-стабильными стратегиями.

ного обдумывания, каждый игрок (тип игрока) время от времени 'не замечал' часть своих возможностей, и пользовался только оставшимися стратегиями. Но пользовался ими рационально!

Эта центральная идея создает естественное 'квантование' или *упорядоченное разбиение* (расслоение) множества доступных стратегий на 'хорошие' (которыми выгодно пользоваться при полноте возможностей), 'посредственные' (которыми выгодно пользоваться при отсутствии хороших), 'плохие' (которыми выгодно пользоваться при отсутствии хороших и посредственных), 'совсем плохие', 'отвратительные', и т.д. Этим выражена идея вместо операции взятия максимума, как представления о рациональном поведении, использовать операцию упорядоченного разбиения. Все равно как если бы в бюллетене для голосования вместо отделения наилучшего кандидата от остальных, требовалось полностью полу-упорядочить всех кандидатов, возможно, объединяя эквивалентных для выборщика кандидатов в классы эквивалентности.

Оказывается, наиболее тонкое (наиболее дробное) разбиение множества стратегий получится, если вести рассуждения в терминах нестандартных чисел, и именно оно и дает наиболее привлекающую нас концепцию решения игры. Остается только сформировать представления о 'рациональном поведении' в пространстве таких чисел, включая содержательно- приемлемое понятие стратегии и понятие максимального элемента предпочтений.[2]

Мы покажем, что четыре возможных (осмысленных) варианта понятия рационального поведения приводят к четырем разным понятиям решений. Оказывается, одно из них совпадет с понятем Нэша, второе - с сильным секвенциальным равновесием. Третье - задает 'равновесие прямой индукции', и последнее, четвертое, самое узкое - задает 'абсолютное равновесие', представляющееся самым интересным из всех, и наконец отвечающее на изначальный вопрос о разрешении динамических игр через их нормальное представление.

Сначала мы покажем недостаточность THNE и отличие абсолютного равновесия (ASE) от него на простом примере. Затем формально введем ASE и остальные понятия в терминах нестандартных чисел. Затем займемся покажем соответствие обычных понятий секвенциального равновесия и THNE с их формулировкой в нестандартных числах.

0.1 Пример, отличающий абсолютное равновесие

Рассмотрим небольшую модификацию популярной в учебниках по теории игр задачи слепой координации, известной как 'Семейный спор' ('Battle of sexes'). Пусть Агата и Борис[3] хотели бы пойти на футбол или в кино, но желательно - вместе ...

[2]Идейно, переход на лексикографически-упорядоченные разбиения и нестандартные числа в области игровых равновесий навеян подобным применением того и другого для Вальрасовских равновесий В.И.Даниловым и А.И.Сотсковым [1989?], и В.М.Маракулиным [1990?].

[3]Наша студентка Агата Махонина показала нам пригодность этого примера для наших целей, а Борис - лицо вымышленное, подходящее для букв A,B :).

Нестандартные смешанные стратегии

Позабудем пока о всех предысториях, последовательностях и эволюциях. Зато разрешим игрокам пользоваться полем нестандартных чисел. (А точнее - кто ж им запретит? Странно, что раньше этого не предполагали.). И примем тезис: любая доступная игроку чистая стратегия должна им использоваться хотя бы изредка. То есть, с чисто-нулевой вероятностью стратегии не могут использоваться, можно только придавать им бесконечно-малые значения разных порядков и размеров.

Подразумевается, что я (будучи иногда нетрезв) *не могу* обещать, что некоторой своей стратегии гарантированно не стану использовать никогда. Я могу только обещать, что на минимизацию числа своего глупого поведения потрачу некоторые ресурсы, а на минимизацию очень глупого поведения - еще большие ресурсы, и т.д. Причем, возможно, некоторые варианты нежелательности упорядочены для меня лексикографически. Скажем, все подходящие ресурсы я бы потратил, чтобы остаться в живых. Но если есть ресурсы ненужные для этой цели, я бы их потратил на увеличение вероятности победы любимой футбольной команды. А если что-то останется - то уже на увеличение вероятности личного комфорта. Это и есть представление о поведении в нестандартных числах, и именно в них формулируется новое понятие смешанной стратегии. Я как бы выбираю порядки малости для тех стратегий, которые я предпочел бы не использовать, если возможно.

Как обычно, рассматривая смешанное расширение конечной игры в нормальной форме (являющейся, возможно, отражением какой-либо динамической игры с неполной, информацией), будем обозначать множество игроков $N = \{1, ..., n\}$, чистую стратегию s_i $(i \in N)$ считать ортом в m_i мерном пространстве (считая, что у игрока есть m_i стратегий), множество чистых стратегий каждого игрока $S_i = \{e_1, ..., e_{m_i}\}$ – базисом в R^{m_i}. Смешанную стратегию обозначим $\sigma_i \in \Delta[S_i]$, и заданный выигрыш от профиля $S \in R^{m_1+m_2+...+m_n}$ чистых стратегий обозначим $u_i(S)$.

Мы примем следующую точку зрения: намечая смешанную стратегию, каждый игрок ранжирует все свои чистые стратегии на использующиеся время от времени, использующиеся очень редко, использующиеся крайне редко и т.п. В рамках одного порядка малости возможно обычное смешивание стратегий. Таким образом, нестандартная смешанная стратегия игрока i — это:

1. Упорядоченное разбиение
$$S_i = S_i^0 \sqcup S_i^1 \sqcup \cdots \sqcup S_i^{\hat{l}} \qquad \exists \hat{l} \leq m_i - 1 \tag{1}$$
множества чистых стратегий на уровни малости “частоты использования”;

2. Вполне смешанное вероятностное распределение $\sigma_i^j \in \Delta^0[S_i^j]$ “частот использования” для каждого уровня или порядка малости.

[[Можно считать, что “развернутая” нестандартная смешанная стратегия игрока - это вектор $\bar{\sigma}_{\mathbf{i}} = (\sigma_i^1, ..., \sigma_i^{m_i}) \in [0,1]^{m_i * m_i}$, из стандартного действительного пространства, но увеличенной возведением в квадрат размерности. Причем такой вектор, что $\sigma_i^j \in \Delta^0[S_i^j]$ для каждого уровня или порядка малости, следовательно $\sum_{k \in S^l} \sigma_k^l =$

1, $(\sigma^l_k > 0 \quad k \in S^l)$, $(\sigma^l_k = 0 \quad k \notin S^l)$. Альтернативно можно считать, что ("свернутая") нестандартная смешанная стратегия – это просто m_i-мерный вектор из нестандартного действительного пространства $^*R^{m_i}$ обычной размерности, а расслоенние уровней задается просто порядками малости его компонент, и внутри каждого уровня малости l сохраняется баланс вероятностей вида $\sum_{k\in S^l} \sigma^l_k = 1 * \varepsilon^l \ \ (\exists \varepsilon^l > {}^*0)$.]]

Смешанную стратегию "основного уровня" — $\sigma^0 \in \Delta^0[S^0] \subset [0,1]^m$ (опуская здесь и далее индекс i до конца раздела), можно объяснить так. «Если ничего особенного не случается, и ничто не мешает», то игрок обычно использует чистую стратегию именно из носителя этой основной смешанной стратегии. Если же вдруг он будет «не в себе», и использовать стратегий из множества S^0 не сможет, то он использует стратегию из носителя следующего уровня S^1; произойти такое, впрочем, может лишь с "очень малой" вероятностью ε. Если же нельзя использовать ни хороших стратегий из S^0, ни средних из S^1, то игрок использует стратегии из S^2, но уже с совсем малой вероятностью ε^2. Если игроку доступны 3 стратегии, то ему достаточно наметить не более 3-х уровней малости своего поведения, то есть оптимизировать его в 9-мерном пространстве.

Игроку достаточно пользоваться единственным нестандартным бесконечно малым числом ε из $^*\mathbf{R}$, не используя всего богатства нестандартных чисел. Тогда (свернутая) смешанная стратегия игрока кратко записывается в виде полинома от ε и компонент развернутой стратегии:

$$\sigma = \sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \cdots + \varepsilon^{(m-1)}\sigma^{(k-1)} \in^* \mathbf{R}^m. \tag{2}$$

Разбиение (1), соответствующее нестандартной смешанной стратегии σ, обозначим за $\pi[\sigma]$, а его главную компоненту S^0 — за $st\sigma$.

Нестандартная максимизация

Теперь пусть игрок со множеством чистых стратегий $S = \{e_1, ..., e_m\}$ и возможностью применять нестандартные смешанные стратегии, сталкивается (при заданных стратегиях партнеров σ_{-1}) с функцией выигрыша от своих стратегий $u_{\sigma_{-1}} : S \to {}^*\mathbf{R}$, принимающей нестандартные значения. Подобная ситуация часто возникнет, если его партнёры тоже используют нестандартные смешанные стратегии σ_{-1}.

Тогда возникает задача выбора оптимальной стратегии среди нестандартных смешанных. Обозначим за $\Upsilon[S]$ множество всех разбиений типа (1) множества S, и на этом множестве зададим естественный порядок:

с $\pi' \preceq \pi''$, если первое получается из второго измельчением.

Пользуясь этим порядком или обычным для максимизации разбиением только на два слоя (оптимальных и не-оптимальных), мы введём четыре разных по глубине разумности понятия оптимизации (соответствующих, как потом станет ясно, глубине продуманности концепции равновесия):

1. $Arg\max u \subset S$ — множество чистых стратегий игрока, на которых достигает максимума функция $st(u(\cdot))$, то есть стандартная часть функции выигрыша. Это означает, что игрок игнорирует бесконечно малые добавки к выигрышам. (Будет соответствовать обычному равновесию Нэша.)

2. $Abs \max u \subset S$ — множество чистых стратегий игрока, на которых достигает максимума сама функция u, включая стандартную и нестандартную части, то есть все бесконечно-малые принимаются в расчёт. (Соответствует равновесию дрожащей руки.)

3. $Arg\,\mathrm{segm}\, u \in \Upsilon[S]$ — разбиение (1) множества S, являющееся упорядоченным прообразом $st(u)$, то есть $[st(u)|_{S^j} = const \quad \forall S^j]$, и $[st(u)|_{S^j} > st(u)|_{S^h} \iff j > h]$. (Соответствует равновесию форвардной (прямой) индукции.)

4. $Abs\,\mathrm{segm}\, u \in \Upsilon[S]$ — разбиение (1) множества S, являющееся упорядоченным прообразом u, то есть $u|_{S^j} = const \in {}^*\mathbf{R}$ и $u|_{S^j} > u|_{S^h} \iff j > h$. (Соответствует абсолютному равновесию.)

Скажем, семь стратегий (a, b, c, d, e, f, g) могут приносить вектор выигрышей
$(u(a), u(b), u(c), u(d), u(e), u(f), u(g)) = (5+\varepsilon,\ 5+\varepsilon,\ 5+\varepsilon^2,\ 5,\ 4+\varepsilon\ ,4\ ,3)$,
то есть семь значений функции полезности.

Первый из способов оптимизации даст разбиение на оптимальные и не оптимальные стратегии вида
$Arg \max u -> \quad S^0 \sqcup S^1 = \{a, b, c, d\} \sqcup \{e, f, g\}$.

Второй из способов оптимизации даст разбиение с учетом нестандартных чисел на оптимальные и не оптимальные стратегии вида
$Abs \max u -> \quad S^0 \sqcup S^1 = \{a, b\} \sqcup \{c, d, e, f, g\}$.

Третий из способов оптимизации даст стандартное разбиение на разные уровни предпочтительности стратегий вида
$Arg\,\mathrm{segm}\, u -> \quad S^0 \sqcup S^1 \sqcup S^2 = \{a, b, c, d\} \sqcup \{e, f\} \sqcup \{g\}$.

Четвертый из способов оптимизации даст нестандартное разбиение на разные уровни предпочтительности стратегий вида
$Arg\,\mathrm{segm}\, u -> \quad S^0 \sqcup S^1 \sqcup S^2 \sqcup S^3 \sqcup S^4 \sqcup S^5 = \{a, b\} \sqcup \{c\} \sqcup \{d\} \sqcup \{e\} \sqcup \{f\} \sqcup \{g\}$.

Из примера ясно, что последний способ означает наиболее глубокую рациональность в различении более хороших стратегий от менее хороших.

Игры в нормальной форме: от Нэша к абсолюту

А теперь кульминация — четыре концепции равновесия.

Определение. Набор нестандартных смешанных стратегий $\sigma_i | i \in N$ игроков в игре в нормальной форме называется:

1. Равновесием Нэша, если

$$\forall i \quad st\sigma_i \subset Arg \max u_i(^*, \sigma_{-i});$$

2. Равновесием дрожащей руки, если

$$\forall i \quad st\sigma_i \subset Abs \max u_i(^*, \sigma_{-i});$$

3. Равновесием с учётом прямой индукции, если

$$\forall i \quad st\pi[\sigma_i] \preceq Arg\, segm\, u_i(^*, \sigma_{-i});$$

4. Абсолютным равновесием, если

$$\forall i \quad st\pi[\sigma_i] \preceq Abs\,segm\,u_i(^*, \sigma_{-i}).$$

Обоснуем соответствие трех определений смыслу известных понятий. Для равновесия Нэша все очевидно.

Для THNE расслоение порядков малости позволяет (неоднозначно) построить ту последовательность, что требуется стандартным определением...

Для форвардной индукции, не определявшейся строго (??), наш пример поясняет, что...

Четвертое определение новое

Теперь, полезно сопоставить также с INDw и показать, как оно сработает в развернутой форме... или это уже есть на примере?

- - - -

((Собственно, это всё. Первые две концепции совпадают с известными концепциями с теми же названиями. Для нестандартных смешанных стратегий игра в развёрнутой форме вроде получается эквивалентной игре в нормальной форме, соответствующей ей, если пользоваться концепцией абсолютного равновесия. Форвардная индукция - вроде та самая, что обсуждалась для игр в развёрнутой форме.

0.2 Теорема существования абсолютного равновесия

Покажем, что для любой конечной игры в нормальной форме существует абсолютное равновесие. Для этого лишь немного видоизменим доказательство существования равновесия, устойчивого относительно дрожайщей руки.

Напомним, в чём заключается последнее. Мы при любом натуральном k «отступаем» от граней симплекса всех смешанных стратегий на $1/k$, и рассматриваем равновесие Нэша для этой урезанной игры.

Далее, нас интересует вопрос о носителях смешанных стратегий в соответствующих равновесиях: на каких гранях симплексов эти носители живут? Под носителем в данном случае понимается множество чистых стратегий, вероятности использования которых в соответствующем k-равновесии строго выше, чем минимально дозволенное значение $1/k$.

Возможно всего $2^{|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_n|}$ комбинаций носителей, иными словами, этих комбинаций — конечное число. Поэтому (по принципу Дирихле) для некоторой комбинации носителей ($\tilde{S}_1 \subset S_1, \ldots, \tilde{S}_n \subset S_n$) найдётся бесконечное количество таких k, что k-равновесие характеризуется соответствующим набором носителей.

Далее, из последовательности таких «однотипных» равновесий извлекается сходящаяся, и она сходится в точности к равновесию дрожащей руки.

Мы же сделаем только одно уточнение: вместо набора носителей, мы рассмотрим набор *разбиений*. А именно, для каждого k-равновесия можно указать, как разбиваются функции выигрыша игроков в соответствии с $argsegm$-принципом, описанным выше. Получим набор разбиений $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Наборов разбиений хоть и больше, чем наборов носителей, но опять-таки конечное число. Поэтому существует бесконечное количество таких k, что k-равновесие характеризуется соответствующим набором разбиений.

Выделяем сходящуюся последовательность, и убеждаемся, что в ней $argsegm$-разбиения превращаются в $abssegm$-разбиения. Принцип же максимизации сохраняется так же, как он сохранялся при переходе от Нэша к равновесию дрожащей руки. Доказательство окончено.