Теорема Эрроу о диктаторе

Венцом теории игр и математической формализации общественных наук вообще является теорема Эрроу, утверждающая несовместимость демократического способа принятия решений с простейшими и базовыми принципами какого-либо разумного способа принятия решений как такового. Прежде чем дать строгую формализацию сказанного, я расскажу об истории вопроса.

Началось всё с того, что в период французской революции (1789-1794 года) некто по имени Борда предложил следующий способ принятия решений. А именно, пусть перед обществом стоят несколько альтернатив: $a_1, \ldots, a_l$. Это могут быть какие-либо проекты, типа «построить мост», «открыть кабак», «учредить университет» и т.п. Президент опрашивает всех членов общества, предлагая им упорядочить имеющиеся альтернативы в порядке убывания привлекательности, и присвоить им номера: $1, 2, \ldots, l$. Затем каждой альтернативе присваивается её суммарный «рейтинг», равный сумме номеров во всех n списках, где n — население страны (т.е. количество членов общества). «Общественное мнение» представляет собой список альтернатив, упорядоченный по рейтингу. Возможно, некоторые альтернативы станут для общества равноценными (не будучи равноценными ни для каких членов общества).

Подобным механизмом «формирования общественного мнения»пользовались долгое время в различных парламентах (да и ныне встречаются вариации описанной схемы). Вместе с тем, было замечено, что народ «хитрит»: чувствуя, что выбор других склоняется к некоторой нежелательной альтернативе a, человек засовывает эту альтернативу в самый конец списка, искажая свои истинные предпочтения. Таким способом он присваивает ей огромный номер, который тянет эту альтернативу на дно.

Посмотрим, к чему это может привести. Пусть есть двое...

Осознав это нежелательное свойство правила Борда, народ двинулся на поиски «истинного», самого справедливого и неманипулируемого правила выбора, которое бы обладало тем свойством, что для сравнения данной пары альтернатив (скажем, открытие кабака или строительство моста) не нужно было опрашивать обывателей об их отношении к учреждению нового университета. Это и накладно (дополнительная работа), и как-то нелогично.

В подобных поисках прошло полтора века, а универсального правила всё никак не находилось. В то же время, все считали это скорее недоразумением: вот-вот ещё подумаем, и найдём ответ. Каково же было замешательство в научных кругах, когда в середине XX века (1951 год) величайший мат-экономист всех времён и народов Кеннет Эрроу объявил, что единственным правилом «из всех вообще мыслимых правил», удовлетворяющим вышеупомянутому требованию, является правило диктатуры, т.е. полное игнорирование предпочтений и пожеланий всех граждан, кроме одного, который во всех случаях навязывает обществу свою волю.

На осмысление этого открытия экономическому миру понадобилось не менее четверти века: только в середине 70-х годов стали появляться результаты, дополняющие теорему Эрроу или как-либо иначе с ней тесно связанные. Однако уже через пару-тройку лет за спекуляцию вокруг этой теоремы взялась западная пресса: статьи о провале капитализма, демократии и т.п. изобиловали на страницах газет, а электорат начал потихоньку смещаться в сторону коммунистов. «Антикапиталистический бум» закончился, впрочем, с появлением на улицах и площадях цветущей Европы советских солдат и танков.

Мы, однако, отклонились от темы. Итак, переходим к строгому определению всех обсуждаемых понятий. Обозначим за N, как обычно, множество игроков (точнее, «членов общества»), а за A — множество доступных обществу *альтернатив*. Далее, пусть P — множество всех строгих упорядочений множества A (т.е. перестановок), а R — множество нестрогих упорядочений (которых, понятно, больше). *Функционалом общественного выбора* Эрроу назвал произвольное отображение $F : P^N \to R$. Пусть альтернатив не менее трёх, а функционал обладает двумя свойствами:

(1) Паретовость, или эффективность (т.е если все члены общества считают, что кабак предпочтительнее новому детсаду, то функционал общественного выбора тоже должен признавать открытие кабака более насущной задачей, нежели открытие детсада).

(2) Независимость от посторонних альтернатив.

Тогда функционал является диктаторским, т.е. существует такой игрок i, что просто-напросто $F(p_1, \ldots, p_n) = p_I$ — проекция на I-ю координату.