ЛЕКЦИЯ 1

Говорят, что на множестве M введена структура гладкого n-мерного многообразия, если

1. Зафиксирована система подмножеств $V_\alpha \subset M$ (называемых *картами*; совокупность всех карт называется *атласом*), покрывающих в совокупности все M: $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Для каждой карты U_α зафиксировано открытое подмножество $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ и взаимно однозначное отображение $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ (называемое *системой координат*).
2. Если подмножества U_α и U_β пересекаются, то множества $W_{\alpha\beta} = x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ и $W_{\beta\alpha} = x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ открыты, а отображение $\varphi_{\alpha\beta} = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : W_{\alpha\beta} \to W_{\beta\alpha}$ (называемое отображением замены координат) является бесконечно гладким.

Замечание 1. $\varphi_{\alpha\beta}$ это отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (определенное на открытом подмножестве); поэтому его бесконечная гладкость означает просто наличие непрерывных частных производных произвольного порядка.

Замечание 2. К атласам можно добавлять новые карты. После добавления карты U_0 опять получается атлас, если отображения перехода $\varphi_{0\alpha}$ от новой карты ко всем старым — бесконечно гладкие. В этом случае мы будем считать, что новый атлас эквивалентен старому, т.е. задает на M ту же самую структуру многообразия. Обобщая этот пример, мы будем говорить, что два атласа на M эквивалентны, т.е. задают одну и ту же структуру многообразия, если их объединение — опять атлас, то есть отображения замены координат при переходе от карт первого атласа к картам второго — бесконечно гладкие.

3. Существует атлас, эквивалентный данному и содержащий конечное или счетное число карт.
4. Если $a, b \in M$ — две различные точки, то к атласу на M можно добавить две совместимых с ним карты U_a и U_b так, что $a \in V_a$, $b \in V_b$, и множества U_a и U_b не пересекаются.

Пример 1. Структура одномерного многообразия на прямой $\mathbb{R}^1$. Здесь имеется атлас, состоящий из одной карты $U = \mathbb{R}^1$; также $V = \mathbb{R}^1$, а координатное отображение $x : U \to V$ — тождественное.

Пример 2. Обобщение примера 1: можно в качестве M взять любое открытое подмножество $\mathbb{R}^1$; $U = V = M$, x — тождественное отображение. Можно также взять открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ — на нем тем же способом вводится структура n-мерного многообразия.

Пример 3. Структура одномерного многообразия на окружности $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Здесь можно взять 2 карты: $U_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\}$ и $V_2 = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\}$. Положим $V_1 = \mathbb{R}^1$, а координатное отображение $x_1 : U_1 \to V_1$ — стереографическая проекция $x_1(x, y) = x/(1 - y)$. Для карты V_2 — аналогично: $V_2 = \mathbb{R}^1$, $x_2 : U_2 \to V_2$ — проекция $x_2(x, y) = x/(1 + y)$. Отображение замены координат: если $(x, y) \in U_1 \cap U_2$, то есть $y \neq \pm 1$, то обе координаты $x_1(x, y), x_2(x, y)$ отличны от 0, и $x_2(x, y) = 1/x_1(x, y)$ — бесконечно гладкое отображение.

Пример 4. Последние два требования из определения гладкого многообразия страхуют от "диких" примеров. Вот пример структуры, удовлетворяющей всем требованиям из определения, кроме последнего. Рассмотрим множество, состоящее из всех ненулевых чисел $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, и еще двух элементов, 0_1 и 0_2. Введем на нем карты $U_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{0_1\}$ и $U_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{0_2\}$. Положим $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$, и возьмем в качестве систем координат очевидные "тождественные" отображения $U_i \to V_i$, $i = 1, 2$. Имеем $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и отображение замены координат — тождественное. Пусть $0_+ \in U_+$, $0_- \in U_-$, где U_+, U_- — какие-то добавленные карты. Поскольку отображение перехода от карты U_+ к карте U_1 — гладкое и, в частности, непрерывное, множество $\{x_1(x_+^{-1}(t)) \mid t \in U_+\} \subset \mathbb{R}$ открыто и содержит точку $0 = x_1(0_+)$ — следовательно, оно содержит некоторую окрестность этой точки. То же самое верно для множества $\{x_2(x_-^{-1}(t)) \mid t \in U_-\} \subset \mathbb{R}$. Но при $m \neq 0_+, 0_-$ имеет место равенство $x_1(m) = x_2(m)$, откуда вытекает, что эти множества пересекаются — следовательно, пересекаются и карты U_+ и U_-.

Пример 5. Множество (фактор-группу) $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ можно наделить структурой k-мерного многообразия. Пусть $V \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное открытое подмножество такое, что если $u \in V$, $v \in \mathbb{Z}^k$ — вектор с целочисленными координатами, то $u + v \notin V$. Пусть $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ — естественная проекция; обозначим $U = \pi^{-1}(V)$. Тогда отображение $\pi^{-1} : U \to V$ — взаимно однозначное, и его можно принять за координатное.

Нетрудно видеть, что таким образом получается атлас на $\mathbb{T}^k$. Действительно, свойства 1 и 4 очевидны. Свойство 2 вытекает из того, что все отображения перехода являются параллельными переносами на векторы с целыми координатами и, следовательно, бесконечно гладки. Для проверки свойства 3 достаточно доказать, что $\mathbb{T}^k$ можно покрыть конечным количеством карт — докажите ! (достаточно $k + 1$ карты).

Подмножество $U \subset M$ называется открытым, если для всякой карты U_α множество $x_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ является открытым. Нетрудно видеть, что тем самым на многообразии M введена структура топологического пространства, причем каждая точка $a \in M$ обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^n$.

Пример 6. На множестве $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ имеется естественная топология (индуцированная с $\mathbb{R}^2$). На множестве M, однако, нельзя ввести структуру многообразия, порождающую эту топологию. Дело в том, что при удалении из M точки $(0, 0)$ оно распадается на 4 куска (компоненты линейной связности); нетрудно видеть, что если окрестность точки $(0, 0)$ была бы гомеоморфна открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, то при удалении точки она распадалась бы максимум на 2 куска (при $n = 1$) или не распадалась бы вовсе (при $n > 1$).

Таким образом, не всякая топология порождается структурой многообразия. Возникает вопрос, можно ли узнать что-то про структуру многообразия, рассматривая только порожденную этой структурой топологию. Оказывается, что

- Одна и так же топология не может порождаться двумя структурами многообразия разных размерностей.
- Если топология порождена структурой многообразия размерности $n \le 3$, то такая структура единственна.
- Предыдущее утверждение неверно в размерностях $n \ge 4$.

Доказательства всех этих утверждений весьма непросты; мы их не приводим.

Отображение $f : M \to N$ двух гладких многообразий (размерностей m и n, причем возможно $m \ne n$) называется гладким, если оно задается гладкими функциями в произвольных координатах: для всякой точки $m \in M$ существует карта $U_\alpha \ni m$ и карта $U_\beta \ni f(m)$ (в многообразиях M и N соответственно) такие, что отображение $x_\beta \circ f \circ x_\alpha^{-1} : V_\alpha \to V_\beta$ — бесконечно гладкое. Нетрудно видеть, что слова "существуют карты U_α, U_β" можно заменить словами "для произвольных карт U_α, U_β" — поскольку отображения перехода гладкие по определению, а композиция гладких отображений (пространств $\mathbb{R}^k$) — опять гладкое отображение. Кстати, нетрудно видеть, что последнее свойство выполнено и для отображений многообразий: композиция двух гладких отображений гладкая.

Пример 7. Отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}$, сопоставляющее точке $(x, y) \in S^1$ число $f(x, y) = \sin x$ — гладкое (гладкая функция).

Пример 8. Отображение $\gamma : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, сопоставляющее числу t вектор $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ — гладкое. Образ этого отображения называется полукубической параболой; он имеет "острие" в начале координат. Отображения $\mathbb{R}^1 \to M$ называются (параметризованными) кривыми в многообразии M, но этот пример показывает, что если это отображение гладкое, то не следует, тем не менее, называть его "гладкими кривыми" — мы позднее определим это понятие.

Отображение $F : M \to N$ называется диффеоморфизмом, если оно гладкое, взаимно однозначное (т.е. обладает обратным), и обратное отображение $F^{-1} : N \to M$ тоже гладкое. С точки зрения теории многообразий диффеоморфные многообразия неотличимы.