ЛЕКЦИЯ 10

Напомним, что 1-форма ν на многообразии M называется *точной*, если существует такая функция $f \in C^\infty(M)$, что $\nu = df$. Обратный образ точной формы точен: если $A : M \to N$ — непрерывное отображение, и $f \in C^\infty(N)$, то $A^* df = d(f \circ A)$.

Теорема 1. *Форма ν является точной тогда и только тогда, когда значение интеграла $\int_0^1 \gamma^* \nu$, где $\gamma : [0,1] \to M$ — кривая (т.е. гладкое отображение), зависит только от точек $a = \gamma(0)$ и $b = \gamma(1)$ (и не зависит от самой кривой γ). В частности, если $a = b$ (кривая замкнута), то $\int_0^1 \gamma^* \nu = 0$.*

Доказательство. Пусть $\nu = df$; тогда $\gamma^* \nu = d\varphi$, где $\varphi = f \circ \gamma$. Согласно формуле Ньютона–Лейбница (см. предыдущую лекцию), $\int_0^1 \gamma^* \nu = \int_0^1 d\varphi = \varphi(1) - \varphi(0) = f(b) - f(a)$.

Обратно, пусть $I(a, b) = \int_0^1 \gamma^* \nu$ не зависит от выбора кривой γ. Зафиксируем точку $p \in M$ и положим по определению $f(a) = I(p, a)$ (так что $f(p) = 0$). Очевидно, f — гладкая функция на M. 1-форма df представляется функцией двух переменных $F(a, b) = f(b) - f(a) = I(p, b) - I(p, a) = I(a, b)$. Зафиксируем в окрестности U точки a систему координат x, в которой форма ν выглядит как $\sum_{i=1}^n \nu_i(x)\, dx_i$, и пусть $b \to a$. Тогда при вычислении $I(a, b)$ можно в качестве кривой γ использовать прямолинейный отрезок (в координатах x !), соединяющий a и b: $\gamma_i(t) = a_i + t(b_i - a_i)$. Тогда согласно формуле Тейлора, $I(a, b) = \sum_{i=1}^n \nu_i(a)(b_i - a_i) + o(b - a)$. Следовательно, 1-форма, представляемая функцией $I(a, b)$, есть ν. □

1-форма ν на многообразии M называется *замкнутой*, если она локально точна: для всякой точки $a \in M$ найдется окрестность U и функция $f \in C^\infty(U)$ такая, что $\nu(b) = df(b)$ для всякой точки $b \in U$. Очевидно, всякая точная форма замкнута; обратное неверно:

Пример 1. Форма $d\varphi$ на окружности не точна (см. пример 2 лекции 8). Тем не менее, на любой дуге $A \subset S^1$, не совпадающей со всей окружностью, она точна: в качестве f можно взять полярный угол φ.

Для замкнутых форм теорема 1 неверно. Верен, однако, такой более слабый факт:

Теорема 2. *Пусть $\gamma_\tau : [0,1] \to M$ — семейство кривых с фиксированными концами на многообразии M, то есть точка $\gamma_t au(t)$ непрерывно зависит от τ и t, и точки $a = \gamma_\tau(0)$ и $b = \gamma_\tau(1)$ от τ не зависят. Тогда для всякой замкнутой 1-формы ν интеграл $\int_0^1 \gamma_\tau^* \nu$ не зависит от τ. Обратно, если для всякого семейства кривых с фиксированными концами $\int_0^1 \gamma_\tau^* \nu = const$, то форма ν замкнута.*

Доказательство. Пусть форма ν замкнута. Поскольку для всякого τ образ $\gamma_\tau([0,1]) \subset M$ кривой γ_τ компактен, его можно покрыть конечным числом окрестностей $U_1, \dots, U_N$, в каждой из которых форма ν точна: $\nu = df_i$. Если $|\tau_1 - \tau|$ достаточно мал, то образ кривой γ_{τ_1} также покрывается окрестностями $U_1, \dots, U_N$. Отрезок $[0,1]$ можно разбить на подотрезки $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_N, 1]$ так, чтобы $\gamma_\tau(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1}])$ лежал бы в пределах одного множества U_{α_i}, и то же самое было верно для γ_{τ_1}. Обозначим $\kappa_i : [0,1] \to U_i$ произвольную кривую, соединяющую точки $\gamma_\tau(t_i)$ и $\gamma_{\tau_1}(t_i)$ (и лежащую в U_{α_i}). Тогда из теоремы 1 вытекает, что $\int_0^1 \gamma_{\tau_1}^* \nu = \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_{\tau_1}^* \nu = \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_{\tau_1}^* df_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_{\tau_1}^* df_{\alpha_i} - \int_0^1 \kappa_i^* df_{\alpha_i} + \int_0^1 \kappa_{i+1}^* df_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_\tau^* df_{\alpha_i} = \int_0^1 \gamma_\tau^* \nu$. Тем самым величина $\int_0^1 \gamma_\tau^* \nu$ не меняется при достаточно малом изменении параметра τ — следовательно, она не зависит от τ вовсе.

Обратно, пусть для произвольного семейства кривых γ_τ с фиксированными концами интеграл $\int_0^1 \gamma_\tau^* \nu$ не зависит от τ. Для произвольной точки $p \in M$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому шару $B \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1. *Пусть $\gamma : [0,1] \to B \subset \mathbb{R}^n$ — кривая с концами $a, b \in B$. Тогда существует семейство кривых γ_τ с фиксированными концами такое, что $\gamma_0 = \gamma$, а γ_1 представляет собой прямолинейный отрезок: $\gamma_1(t) = a + t(b - a)$.*

Доказательство. $\gamma_\tau(t) = \gamma(t) + \tau(a + t(b - a) - \gamma(t))$. □

Из леммы вытекает, что для двух произвольных кривых γ_0, γ_1 в окрестности U с одними и теми же концами существует семейство кривых γ_τ, их соединяющее. Следовательно, если $\gamma : [0,1] \to U$ — кривая, то $\int_0^1 \gamma^* \nu$ зависит только от концов $\gamma(0), \gamma(1)$. Согласно теореме 1, форма ν точна в окрестности U — то есть замкнута. □

Факторпространство множества замкнутых 1-форм по множеству точных 1-форм на многообразии M обозначается $H^1_{DR}(M)$ и называется пространством первых когомологий де Рама многообразия M. Его размерность называется первым числом Бетти.

Пример 2 (лемма Пуанкаре). $H^1_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$, то есть всякая замкнутая 1-форма на $\mathbb{R}^n$ является точной. Действительно, пусть γ_0, γ_1 — две кривые в $\mathbb{R}^n$ с одними и теми же концами. Тогда, согласно лемме 1, существует семейство кривых γ_τ с фиксированными концами, соединяющее γ_0 и γ_1. Если форма ν замкнута, то, согласно теореме 2, $\int \gamma_\tau^* \nu = const$, откуда $\int \gamma_0^* \nu = \int \gamma_1^* \nu$. Согласно теореме 1, форма ν точна.